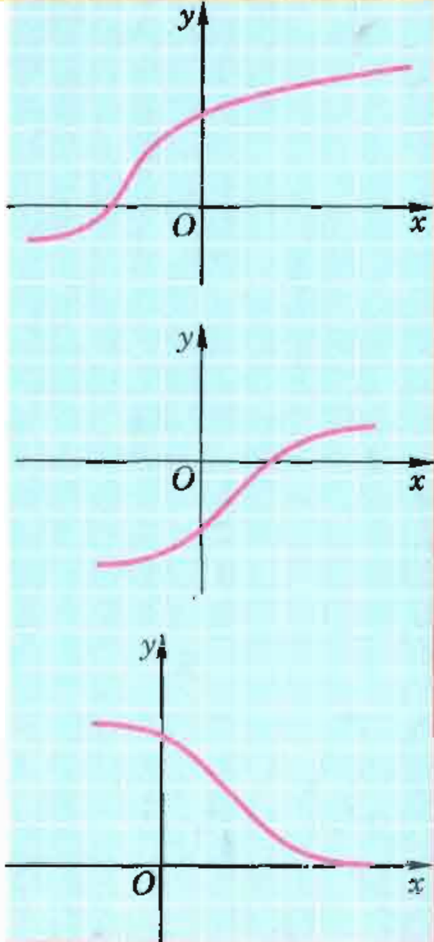
«НАРОДНАЯ АСВЕТА»

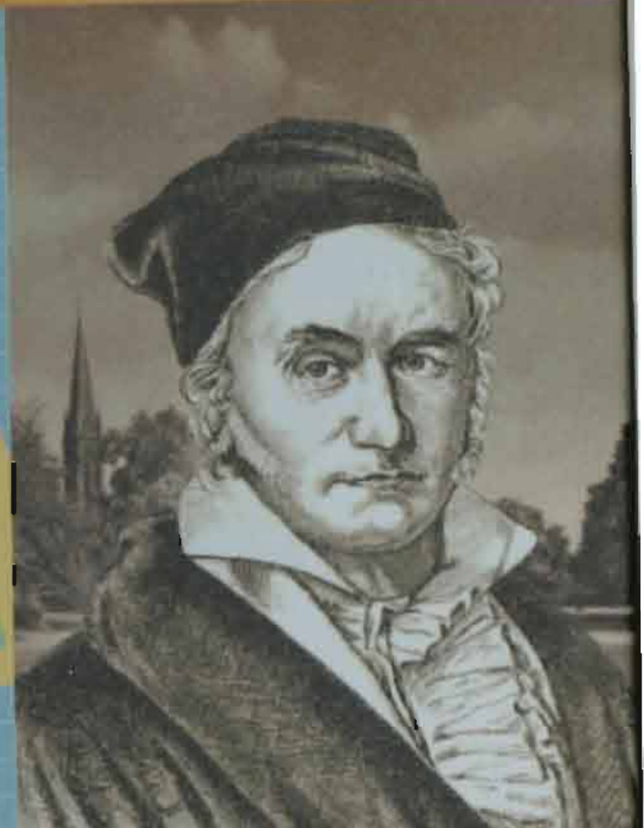


ISBN 985-12-1474-4
9 789851 214743

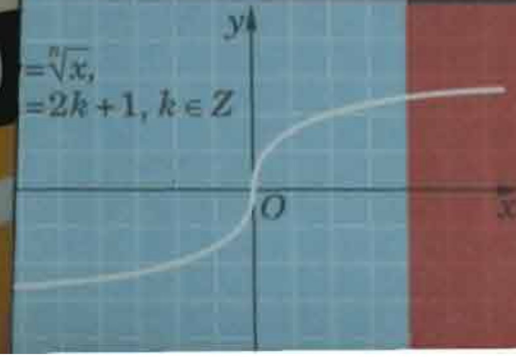
А
АЛГЕБРА
10
2006

АЛГЕБРА

А 10



К. Ф. Гаусс (1777—1855)

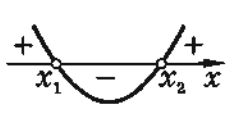
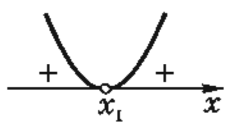
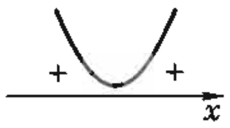
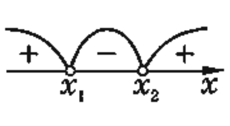
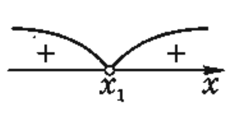
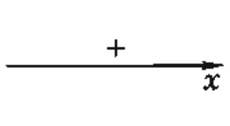


$=\sqrt[n]{x},$
$=2k+1,\ k \in Z$

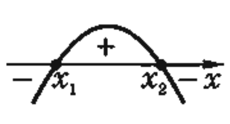
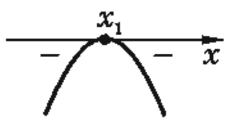
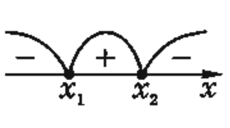
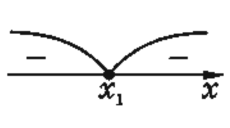
$S_{100} = 1+2+3+\ldots+100 =$
$= 101 \cdot 50$

$S_n = \dfrac{a_1+a_n}{2} \cdot n$

Решение строгих квадратных неравенств вида $ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c<0$ при $a>0$

	$D>0,\ a>0$	$D=0,\ a>0$	$D<0,\ a>0$
Способ решения с использованием графика			
Способ решения методом интервалов			
Ответ для неравенства $ax^2+bx+c>0$	$x<x_1$ или $x>x_2$, т. е. $(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$	$x\neq x_1$, т. е. $(-\infty;x_1)\cup(x_1;+\infty)$	x — любое число, т. е. $\boldsymbol{R}$
Ответ для неравенства $ax^2+bx+c<0$	$x_1<x<x_2$, т. е. $(x_1;x_2)$	Нет решений, т. е. $\varnothing$	Нет решений, т. е. $\varnothing$

Решение нестрогих квадратных неравенств вида $ax^2+bx+c\ge0$, $ax^2+bx+c\le0$ при $a<0$

	$D>0,\ a<0$	$D=0,\ a<0$	$D<0,\ a<0$
Способ решения с использованием графика			
Способ решения методом интервалов			
Ответ для неравенства $ax^2+bx+c\ge0$	$x_1\le x\le x_2$, т. е. $[x_1;x_2]$	$x=x_1$, т. е. x_1	Нет решений, т. е. $\varnothing$
Ответ для неравенства $ax^2+bx+c\le0$	$x\le x_1$ или $x\ge x_2$, т. е. $(-\infty;x_1]\cup[x_2;+\infty)$	x — любое число, т. е. $\boldsymbol{R}$	x — любое число, т. е. $\boldsymbol{R}$

Свойства корней n-й степени ($n\ge2,\ n\in N$)

n — нечетное число	n — четное число
$(\sqrt[n]{a})^n=a$ при любом a	$(\sqrt[n]{a})^n=a$ при $a\ge0$
$\sqrt[n]{a^n}=a$ при любом a	$\sqrt[n]{a^n}=\lvert a\rvert$ при любом a
$\sqrt[n]{-a}=-\sqrt[n]{a}$ при любом a	$\sqrt[n]{-a}=-\sqrt[n]{a}$ при $a=0$
$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$ при любых a и b	$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{\lvert a\rvert}\cdot\sqrt[n]{\lvert b\rvert}$, если a и b одного знака
$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ при любых a и b	$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ при $a\ge0$ и $b\ge0$
$a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^nb}$ при любых a и b	$a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^nb}$ при $a\ge0$ и $b\ge0$ $a\sqrt[n]{b}=-\sqrt[n]{a^nb}$ при $a<0$ и $b\ge0$
$\sqrt[n]{a^nb}=a\sqrt[n]{b}$ при любых a и b	$\sqrt[n]{a^nb}=\lvert a\rvert\sqrt[n]{b}$ при любом a и $b\ge0$
$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ при любых a и $b\neq0$	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{\lvert a\rvert}}{\sqrt[n]{\lvert b\rvert}}$ при значениях a и b одного знака и $b\neq0$
$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ при любых a и $b\neq0$	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ при $a\ge0$ и $b>0$

При любых натуральных значениях $n\ge2$ и $k\ge2$ для $a\ge0$ имеют место тождества:

$\boxed{\sqrt[n]{a}=\sqrt[nk]{a^k}}$ $\boxed{(\sqrt[n]{a})^k=\sqrt[n]{a^k}}$ $\boxed{\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}}$

Квадраты и кубы натуральных чисел от 1 до 10

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
n^3	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

Степени чисел 2, 3, 5

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3^n	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049
5^n	5	25	125	625	3125	15625	78125	390625	1953125	9765625

УДК 512(075.3=161.1)
ББК 22.14я721
А45

Авторы:

Е. П. Кузнецова, Г. Л. Муравьева, Л. Б. Шнеперман, Б. Ю. Ящин

Рецензенты:

кафедра алгебры и методики преподавания математики
Витебского государственного университета им. П. М. Машерова
(доктор пед. наук, профессор *К. О. Ананченко*);
учитель математики высшей категории
гимназии № 11 *И. Г. Арефьева*

Алгебра : учеб. пособие для 10-го кл. учреждений,
А45 обеспечивающих получение общ. сред. образования, с рус. яз. обучения с 12-летним сроком обучения (базовый и повышенный уровни) / Е. П. Кузнецова [и др.]; под. ред. Л. Б. Шнепермана. — Минск : Нар. асвета, 2006. — 286 с. : ил.
ISBN 985-12-1474-4.

УДК 512(075.3=161.1)
ББК 22.14я721

ISBN 985-12-1474-4

ОТ АВТОРОВ

В 10-м классе мы продолжим изучение алгебры — научимся решать квадратные, рациональные, иррациональные неравенства и их системы, а также иррациональные уравнения, рассмотрим действия с корнями n-й степени и свойства степенной функции, свойства арифметической и геометрической прогрессий, некоторые задачи по комбинаторике и теории вероятностей.

Упражнения в учебном пособии нумеруются по главам. Число перед точкой обозначает номер главы, число после точки — номер упражнения в этой главе. Например, 2.17 — это 17-е упражнение из 2-й главы. Аналогично нумеруются и пункты теории. Пункт 3.5 обозначает 5-й пункт из 3-й главы. Упражнения на повторение в конце книги обозначаются номерами, перед которыми стоит буква П. Например, П. 127.

Задания, номера которых отмечены кружочками, например 1.12°, относятся к репродуктивно-продуктивному уровню, их должны уметь решать все ученики, желающие успевать хотя бы на 5 — 6 баллов. Среди остальных заданий наиболее трудные отмечены звездочкой, например, 1.73*. Многие из таких упражнений помещены в сборнике задач; там же предлагаются задания для повторения курса алгебры 10-го класса.

После каждого пункта теории сформулированы вопросы под знаком .

Теоретический материал, выделенный треугольниками ▲, предназначен тем, кто интересуется математикой и собирается изучать ее дальше на повышенном уровне.

Некоторые важные моменты в изложении теории отмечены восклицательным знаком .

Весы  нарисованы там, где есть возможность сравнивать варианты решения или доказательства.

Исторические сведения, встречающиеся в учебном пособии, отмечены знаком .

Квадрат с диагоналями ⊠ обозначает конец доказательства теоремы.

Пояснения к преобразованиям размещаются между двумя вертикальными стрелками (↓...↓ или ↑...↑); направление стрелок показывает, какое именно преобразование поясняется.

Материал на повторение отмечен знаком ⟳.

Квадратные неравенства

1.1. Неравенства с одним неизвестным

⟳ Напомним некоторые сведения о неравенствах.

Неравенство, содержащее одну переменную, называется *неравенством с одной переменной* или *неравенством с одним неизвестным*.

***Решением неравенства с одним неизвестным* называется такое значение неизвестного, при котором это неравенство превращается в верное числовое неравенство.**

***Решить неравенство* — это значит найти все его решения или доказать, что их нет.**

Пример 1. Решить неравенство

$$(x-1)^2 > 0.$$

Решение. Если $x=1$, то $(x-1)^2=0$ и, значит, число 1 не является решением данного неравенства.

Если $x \neq 1$, то $x-1 \neq 0$, и поэтому $(x-1)^2 > 0$. Значит, решением данного неравенства является любое число $x \neq 1$.

Ответ: $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

Пример 2. Решить неравенство

$$(x-1)^2 < 0.$$

Решение. При любом значении x значение выражения $(x-1)^2$ неотрицательное. Значит, неравенство $(x-1)^2 < 0$ не имеет решений.

Ответ: решений нет.

Пример 3. Решить неравенство

$$(x-1)^2 \leqslant 0.$$

Решение. При $x = 1$ значение выражения $x - 1$ равно нулю. Значит, $x = 1$ — решение данного неравенства. Других решений оно не имеет.

Ответ: $x = 1$.

! *Два неравенства называются равносильными, если каждое решение первого неравенства является решением второго неравенства и наоборот — каждое решение второго неравенства является решением первого, т. е. они имеют одни и те же решения. Равносильными называются и неравенства, которые не имеют решений.*

Например, неравенства $(x-1)^2 < 0$ и $x^2 < 0$ равносильны, так как каждое из них не имеет решений. Неравенства $(x-1)^2 \geqslant 0$ и $\frac{1}{(x-1)^2} \geqslant 0$ неравносильны, так как решением первого неравенства является любое число, а решением второго неравенства является любое число $x \neq 1$.

Отметим некоторые свойства неравенств, используемые при их решении.

1. Если в неравенстве перенести слагаемые из одной части в другую с противоположным знаком, то получится неравенство, равносильное данному.

2. Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получится неравенство, равносильное данному.

3. Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число и изменить знак неравенства на противоположный, то получится неравенство, равносильное данному.

Напомним, что *неравенство вида*

$$ax + b > 0$$
$$(ax + b \geqslant 0,\ ax + b < 0,\ ax + b \leqslant 0)$$

с неизвестным x называется ***линейным***. *Если $a \neq 0$, то оно называется* ***неравенством первой степени***.

Определение. Неравенство вида

$$ax^2 + bx + c > 0$$
$$(ax^2 + bx + c \geqslant 0,\ ax^2 + bx + c < 0,\ ax^2 + bx + c \leqslant 0)$$

с неизвестным x, где $a \neq 0$, называется ***квадратным***, или ***неравенством второй степени***.

Если в таком неравенстве старший коэффициент отрицательный, то, умножая обе части неравенства на число -1 и меняя его знак на противоположный, получаем неравенство, равносильное данному, с положительным старшим коэффициентом. Например, неравенство $-3x^2 + 6x - 5 < 0$ равносильно неравенству $3x^2 - 6x + 5 > 0$. Поэтому в дальнейшем мы можем ограничиться изучением квадратных неравенств с положительным старшим коэффициентом.

Определение. Дискриминант квадратного трехчлена, стоящего в левой части квадратного неравенства, называется ***дискриминантом квадратного неравенства***.

Пример 4. Решить неравенство:

а) $x^2 < 5$; б) $x^2 \geqslant 16$; в) $x^2 \leqslant 0$; г) $x^2 < -5$.

Решение. а) $x^2 < 5$;

извлекая арифметический квадратный корень из обеих частей неравенства, получаем равносильное исходному неравенство

$$|x| < \sqrt{5},\ \text{т. е.}\ -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}.$$

Ответ: $(-\sqrt{5}; \sqrt{5})$.

б) $x^2 \geqslant 16$;

$|x| \geqslant 4$;

$x \leqslant -4$ или $x \geqslant 4$.

Ответ: $(-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$.

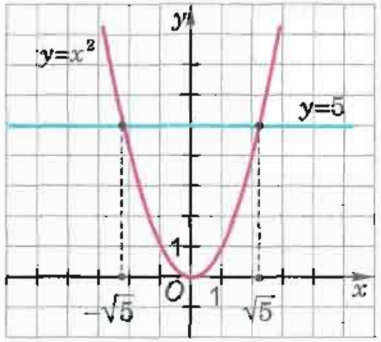


Рис. 1

в) Неравенство $x^2 \leqslant 0$ верно при $x = 0$.

Ответ: 0.

г) Неравенство $x^2 < -5$ при всех значениях x обращается в неверное числовое неравенство.

Ответ: решений нет.

Решение каждого из неравенств в примере 4 можно проиллюстрировать, изобразив, например, для случая а) в одной системе координат графики функций $y = x^2$ и $y = 5$ (рис. 1). На рисунке видно, что при $x \in (-\sqrt{5};\ \sqrt{5})$ часть параболы $y = x^2$ находится ниже прямой $y = 5$.

Выполните иллюстрации к решениям неравенств б), в), г) примера 4.

1. Что называется решением неравенства с одним неизвестным (с одной переменной)?
2. Что значит решить неравенство?
3. Какие два неравенства называются равносильными?
4. Назовите свойства неравенств, которые используются при их решении.
5. Какое неравенство называется квадратным (или неравенством второй степени)? Какие еще неравенства вы знаете?
6. Что называется дискриминантом квадратного неравенства?

Упражнения

Решите неравенство (1.1—1.3).

1.1°. 1) $5x + 6 < 18 - 3x$;

2) $-2(x + 15) < -30$;

3) $-\frac{x}{3} < 2x - \frac{5 - 6x}{4}$;

4) $0,25(2x + 5) < 7x - \frac{10x + 3}{2}$;

5) $4(x - 1) - x(8 - x) < x^2$;

6) $x^2 - (3 + x)x > 2(x - 1)$;

7) $(x + 2)^2 \leqslant (x - 3)^2$;

8) $(7 - x)^2 \geqslant (x + 3)^2$.

1.2. 1) $|x - 3| < 6$; 2) $|x + 6| < 12$;

3) $|2x + 16| > 24$; 4) $|15 + 3x| > 30$;

5) $|4 - 6x| \geqslant 18$; 6) $|9 - 5x| \geqslant 51$;

7) $|0,1x - 4| < 1,2$; 8) $|0,5x + 4| < 5,8$;

9) $\left|\frac{1}{3}x + 10\right| > 5$; 10) $\left|6 + \frac{1}{7}x\right| > 12$.

1.3. 1) $\sqrt{(x - 8)^2} \geqslant 1$; 2) $\sqrt{(4 - x)^2} \leqslant 3$;

3) $\sqrt{(4x + 1)^2} < 7$; 4) $\sqrt{(0,2 - 6x)^2} > 5$;

5) $\sqrt{(9x - 3)^2} \geqslant -4$; 6) $\sqrt{(5 - 2x)^2} \leqslant -3$;

7) $\sqrt{\left(\frac{1}{4}x - \frac{6}{7}\right)^2} > 0$; 8) $\sqrt{\left(\frac{3}{8}x + 4\right)^2} \leqslant 0$.

1.4. Верно ли, что:

1) если $x^2 > 0$, то $x \neq 0$;

2) если $x^2 \leqslant 0$, то $x = 0$;

3) если $x^2 > 4$, то $x = 2$;

4) если $x^2 + 1 < 0$, то $x = -1$?

1.5. Решите неравенство:

1) $x^2 \geqslant 0$; 2) $x^2 \leqslant 0$;

3) $x^2 < 0$; 4) $x^2 > 0$;

5) $x^2 \leqslant -4$; 6) $x^2 < -16$;

7) $-x^2 \geqslant 25$; 8) $-x^2 \leqslant -36$.

1.6°. Из чисел −1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 выберите те, которые являются решениями неравенства:

1) $x^2 - 16 > 0$; 2) $x^2 - 1 \leqslant 0$;

3) $x^2 - x + 3 \leqslant 0$; 4) $x^2 + 2x + 7 > 0$;

5) $x^2 - 6x + 9 \leqslant 0$; 6) $x^2 + 2x + 1 > 0$;

7) $x^2 - 5x + 6 > 0$; 8) $x^2 - 5x + 6 \leqslant 0$.

Решите неравенство (1.7—1.10).

1.7°. 1) $(x + 3)^2 > 0$; 2) $(x + 3)^2 < 0$;

3) $(x + 3)^2 \leqslant 0$; 4) $(x + 3)^2 \geqslant 0$;

5) $(8 - x)^2 < 0$;
6) $(8 - x)^2 > 0$;
7) $(8 - x)^2 \geqslant 0$;
8) $(8 - x)^2 \leqslant 0$;
9) $-x^2 + 2x - 1 \leqslant 0$;
10) $-x^2 - 8x - 16 \geqslant 0$.

1.8°. 1) $x^2 + 4 > 0$;
2) $x^2 + 4 < 0$;
3) $x^2 + 4 \leqslant 0$;
4) $x^2 + 4 \geqslant 0$;
5) $-9 - x^2 > 0$;
6) $-9 - x^2 < 0$;
7) $-9 - x^2 \leqslant 0$;
8) $-9 - x^2 \geqslant 0$.

1.9. 1) $x^2 \geqslant 49$;
2) $x^2 \leqslant 64$;
3) $x^2 < 144$;
4) $x^2 > 225$;
5) $x^2 \leqslant 7$;
6) $x^2 \geqslant 11$.

1.10. 1) $2x^2 + 6 > 8$;
2) $3x^2 - 2 \leqslant 10$;
3) $6x^2 + 4 < 34$;
4) $7x^2 - 131 \geqslant 121$;
5) $4x^2 - 13 > 11$;
6) $5x^2 + 18 < 83$.

1.11. Докажите, что если верно неравенство $m > n$, то верно и неравенство:

1) $8 + m > 8 + n$;
2) $28m > 28n$;
3) $-4m < -4n$;
4) $m - 10 > n - 10$;
5) $\frac{2m}{3} > \frac{2n}{3}$;
6) $\frac{m}{6} > \frac{n}{6}$;
7) $5 - m < 5 - n$;
8) $4m - 13 > 4n - 13$;
9) $6 - \frac{m}{3} < 6 - \frac{n}{3}$;
10) $m^3 > n^3$.

1.12. Равносильны ли неравенства:

1) $4x^2 < 9x$ и $4x < 9$;
2) $3x^5 > 8x^3$ и $3x^3 > 8x$;
3) $9x^4 \leqslant 7x^3$ и $9x \leqslant 7$;
4) $3x^3 \geqslant 5x^2$ и $3x \geqslant 5$?

1.13*. При каком значении p равносильны неравенства:

1) $2x^2 - 8x^4 > 0$ и $p - 4x^2 > 0$;
2) $5x^3 + 2x \leqslant 0$ и $2x^3 + 0{,}8x + p \leqslant 0$;
3) $x^4 - 12x^2 + 36 \geqslant 0$ и $(x^2 - p)^2 \geqslant 0$;
4) $-25x^4 - 4 - 20x^2 \leqslant 0$ и $-(p - 5x^2)^2 \leqslant 0$;
5) $x^2 - 12x + 35 > 0$ и $(x - 5)(x - p) > 0$;
6) $x^2 - x - 42 < 0$ и $(x - p)(x + 6) < 0$?

Решите неравенство (1.14—1.15).

1.14*. 1) $x^2 < p$;
2) $x^2 \geqslant p$;
3) $x^2 \leqslant -p^2$;
4) $x^2 > -p^2$.

1.15*. 1) $(x - p)^2 \geqslant 0$;
2) $(x + p)^2 < 0$;
3) $(x + 4)^2(x - p) < 0$;
4) $(-x - 1)^2(x + p) \geqslant 0$;
5) $(x - p)^2(x - 5) \leqslant 0$;
6) $(x + p)^2(x + 6) > 0$.

1.2. Квадратные неравенства с отрицательным дискриминантом

Рассмотрим решение неравенств вида

$$ax^2 + bx + c > 0$$
$$(ax^2 + bx + c \geqslant 0,\ ax^2 + bx + c < 0,\ ax^2 + bx + c \leqslant 0),$$

где $a > 0$; $D = b^2 - 4ac < 0$.

Пример 1. Решить неравенство

$$3x^2 - 6x + 5 > 0.$$

Решение. Здесь $D = 36 - 60 = -24 < 0$.

Рассмотрим параболу $y = 3x^2 - 6x + 5$. Так как старший коэффициент $a = 3$ положительный, то ветви параболы направлены вверх, а так как дискриминант $D = -24$ отрицательный, то парабола не пересекается с осью Ox (рис. 2). Поэтому она расположена над осью Ox; таким образом, при любом значении x имеем $y > 0$. Значит, $3x^2 - 6x + 5 > 0$ при любом значении x.

Ответ: любое число.*

Заметим, что при решении этого неравенства нас интересовало, куда направлены ветви параболы и как она расположена относительно

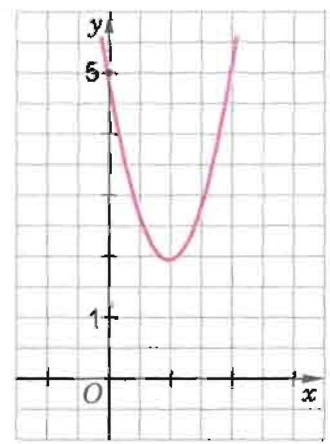


Рис. 2

* Этот ответ можно записать так: R, или $(-\infty; +\infty)$.

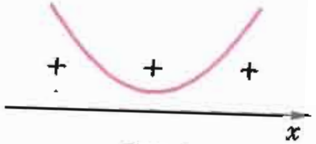


Рис. 3

оси Ox. Поэтому можно было бы ограничиться упрощенным вспомогательным рисунком (рис. 3).

Пример 2. Решить неравенство

$$2x^2 + 4x + 3 \leqslant 0.$$

Решение. Имеем $D = 16 - 24 = -8 < 0$.

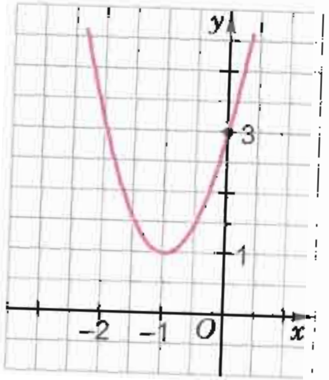


Рис. 4

Рассмотрим параболу $y = 2x^2 + 4x + 3$. Так как старший коэффициент $a = 2$ положительный, то ветви параболы направлены вверх, а поскольку дискриминант $D = -8$ отрицательный, то парабола не пересекается с осью Ox (рис. 4). Поэтому парабола $y = 2x^2 + 4x + 3$ расположена над осью Ox; таким образом, при любом значении x имеем $y > 0$. Значит, $2x^2 + 4x + 3 > 0$ при любом значении x. Следовательно, рассматриваемое неравенство решений не имеет.

Ответ: решений нет.

Приведем возможное оформление решения неравенства из примера 2:

$$2x^2 + 4x + 3 \leqslant 0,$$
$$D = 16 - 24 = -8 < 0;$$
$$a = 2 > 0.$$

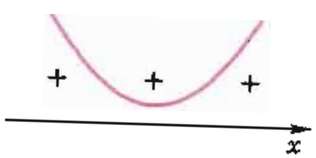


Рис. 5

Парабола $y = 2x^2 + 4x + 3$ расположена над осью Ox (рис. 5), т. е. $y > 0$ при любом значении x, поэтому данное неравенство решений не имеет.

Ответ: решений нет.

Пример 3. Решить неравенство

$$-4x^2 + 8x - 5 \leqslant 0.$$

Решение.

$$-4x^2 + 8x - 5 \leqslant 0,$$
$$4x^2 - 8x + 5 \geqslant 0,$$
$$D = (-8)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 5 = 64 - 80 = -16 < 0;$$
$$a = 4 > 0.$$

Рис. 6

Парабола $y = 4x^2 - 8x + 5$ расположена над осью Ox (рис. 6), т. е. $y > 0$ при любом значении x, поэтому данное неравенство верно при любом значении x.

Ответ: $(-\infty; +\infty)$.

Можно было решить это неравенство таким образом:

$$-4x^2 + 8x - 5 \leqslant 0,$$
$$D = 64 - 80 = -16 < 0;$$
$$a = -4 < 0.$$

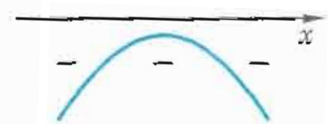


Рис. 7

Парабола $y = -4x^2 + 8x - 5$ расположена под осью Ox (рис. 7), т. е. $y < 0$ при любом значении x, поэтому данное неравенство верно при любом значении x.

Ответ: R.

Пример 4. Решить неравенство

$$-x^2 - 3x - 3 > 0.$$

Решение.

$$-x^2 - 3x - 3 > 0,$$
$$x^2 + 3x + 3 < 0,$$
$$D = 9 - 12 = -3 < 0;$$
$$a = 1 > 0.$$

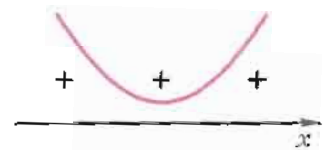


Рис. 8

Парабола $y = x^2 + 3x + 3$ расположена над осью Ox, т. е. $y > 0$ при любом значении x, поэтому неравенство $x^2 + 3x + 3 < 0$, а значит, и данное неравенство решений не имеет (рис. 8).

Ответ: решений нет.

1. В каком случае квадратное неравенство $ax^2 + bx + c \geqslant 0$ с отрицательным дискриминантом не имеет решений?
2. В каком случае решением квадратного неравенства $ax^2 + bx + c < 0$ с отрицательным дискриминантом является любое число?

Упражнения

1.16. Докажите, что при любом значении x верно неравенство:

1) $2x^2+27>0$;
2) $6x^2+13>0$;
3) $(x-2)^2+6>0$;
4) $(x+8)^2+3>0$;
5) $-(x+1)^2-4<0$;
6) $-(x-2)^2-4<0$;
7) $(25x^2-8)^2\geqslant 0$;
8) $(x-9)^2+48^0\geqslant 0$.

Решите неравенство (1.17—1.20).

1.17°.
1) $x^2+x+2>0$;
2) $x^2+3x+5\geqslant 0$;
3) $x^2-4x+6\geqslant 0$;
4) $4x^2-8x+9\leqslant 0$;
5) $x^2+6x+10<0$;
6) $3x^2+2x+4>0$;
7) $2x^2-4x+9\leqslant 0$;
8) $2x^2-3x+7<0$.

1.18°.
1) $-x^2+4x-7>0$;
2) $-3x^2-6x-8<0$;
3) $-x^2+3x-4<0$;
4) $-x^2+x-2>0$;
5) $-2x^2+4x-5\leqslant 0$;
6) $-3x^2+5x-9\geqslant 0$;
7) $-x^2+3x-5\geqslant 0$;
8) $-5x^2-10x-8\leqslant 0$;
9) $-\frac{2}{3}x^2+2x-\frac{10}{3}>0$;
10) $-0{,}5x^2-5{,}5x-25<0$.

1.19°.
1) $x^2-5x+10>0$;
2) $2x^2-3x+5>0$;
3) $-3x^2+4x-5<0$;
4) $-x^2+3x-8<0$.

1.20.
1) $x>x^2+4$;
2) $2x>x^2+3$;
3) $4+x^2\geqslant 3x$;
4) $8+5x<-x^2$;
5) $3x^2>x-5$;
6) $6-3x<-2x^2$;
7) $\frac{x^2}{10}-\frac{7x}{5}\geqslant -5$;
8) $\frac{x^2}{3}-\frac{3x-10}{4}\leqslant\frac{2x}{3}$.

1.21. Докажите, что при $q>100$ любое значение x является решением неравенства:

1) $x^2-4x+q>0$;
2) $x^2+20x+q>0$.

1.22. Докажите, что при $q>64$ не имеет решений неравенство:

1) $x^2+16x+q\leqslant 0$;
2) $x^2-6x+q\leqslant 0$.

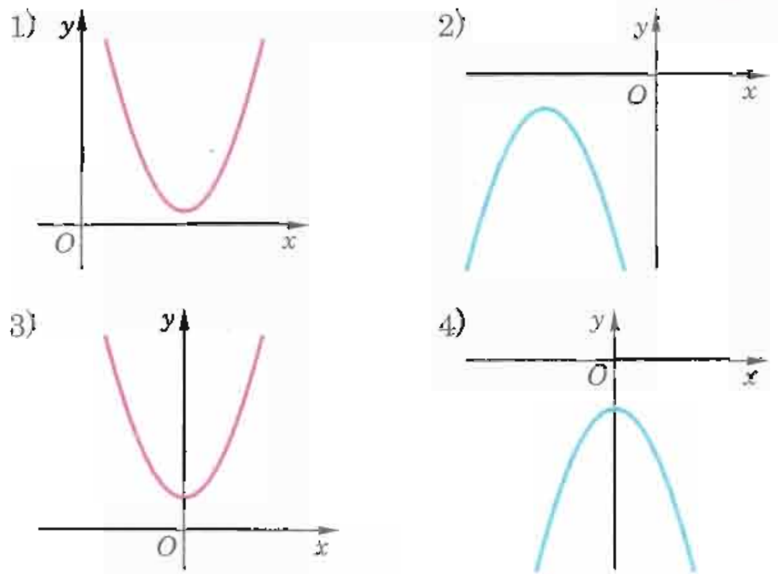


Рис. 9

1.23. На рисунке 9 изображен график квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$. Определите по графику:

а) знаки коэффициентов a, b, c;
б) знак дискриминанта;
в) значения x, при которых значения y положительны;
г) значения x, при которых значения y отрицательны.

1.24. Решите неравенство:

1) $(3x^2-6x+17)(0{,}5x-4)>0$;
2) $(9x^2+x+5)(1{,}5x+9)<0$;
3) $(-12x^2+5x-7)(4x+7)\geqslant 0$;
4) $(-8x^2-3x-9)(5x-6)\leqslant 0$.

1.3. Квадратные неравенства с дискриминантом, равным нулю

Рассмотрим решение неравенств вида

$$ax^2+bx+c>0$$
$$(ax^2+bx+c\geqslant 0,\ ax^2+bx+c<0,\ ax^2+bx+c\leqslant 0),$$

где $a>0$; $D=b^2-4ac=0$.

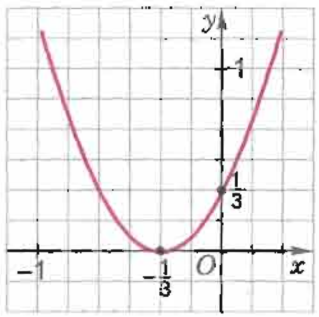


Рис. 10

Пример 1. Решить неравенство

$$3x^2+2x+\frac{1}{3}>0. \qquad (1)$$

Решение. *Способ 1.* Рассмотрим параболу $y=3x^2+2x+\frac{1}{3}$. Так как старший коэффициент $a=3$ положительный, то ветви параболы направлены вверх, а поскольку дискриминант $D=4-4\cdot3\cdot\frac{1}{3}=0$, то парабола имеет с осью Ox только одну общую точку. Эта точка — вершина параболы, абсцисса вершины $x_0=-\frac{b}{2a}=-\frac{1}{3}$ (рис. 10). Поэтому все точки параболы, за исключением вершины, расположены над осью Ox, т. е. при любом значении $x\neq-\frac{1}{3}$ имеем $y>0$. Значит, $3x^2+2x+\frac{1}{3}>0$ при любом значении $x\neq-\frac{1}{3}$.

Ответ: $\left(-\infty;\ -\frac{1}{3}\right)\cup\left(-\frac{1}{3};\ +\infty\right)$.

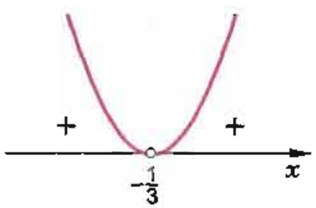


Рис. 11

Заметим, что при решении неравенства нас интересовало расположение параболы относительно оси абсцисс. Поэтому при решении подобных неравенств можно ограничиться упрощенным вспомогательным рисунком (рис. 11).

Запись решения можно оформить так:

$$3x^2+2x+\frac{1}{3}>0,$$
$$D=4-4\cdot3\cdot\frac{1}{3}=0,$$
$$a=3>0,$$
$$x_0=-\frac{2}{2\cdot3}=-\frac{1}{3}.$$

Парабола $y=3x^2+2x+\frac{1}{3}$ касается оси Ox, и ее ветви

направлены вверх (рис. 12; точка $x_0=-\frac{1}{3}$ на оси Ox отмечена светлым кружком, поскольку неравенство строгое).

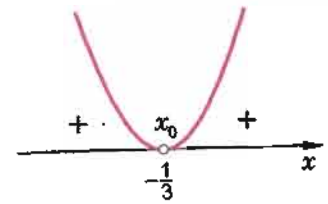


Рис. 12

Ответ: $\left(-\infty;\ -\frac{1}{3}\right)\cup\left(-\frac{1}{3};\ +\infty\right)$.

Способ 2. Рассмотрим квадратный трехчлен $3x^2+2x+\frac{1}{3}$. Так как его дискриминант $D=0$, то трехчлен имеет равные корни $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}=-\frac{1}{3}$ и может быть представлен в виде

$$3x^2+2x+\frac{1}{3}=3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2.$$

Поэтому неравенство (1) можно записать следующим образом:

$$3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2>0.$$

Решением этого неравенства является, очевидно, любое значение $x\neq-\frac{1}{3}$. Значит, и решением неравенства (1) является любое значение $x\neq-\frac{1}{3}$.

Ответ: любое число $x\neq-\frac{1}{3}$.

Пример 2. Решить неравенство

$$4x^2-2x+\frac{1}{4}\leqslant0.$$

Решение. *Способ 1.*

$$4x^2-2x+\frac{1}{4}\leqslant0,$$
$$D=4-4\cdot4\cdot\frac{1}{4}=0,$$
$$a=4>0,$$
$$x_0=-\frac{-2}{2\cdot4}=\frac{1}{4}.$$

Парабола $y = 4x^2 - 2x + \frac{1}{4}$ касается оси Ox, и ее ветви направлены вверх (рис. 13; точка $x_0 = \frac{1}{4}$ на оси Ox отмечена черным кружком, поскольку неравенство нестрогое).

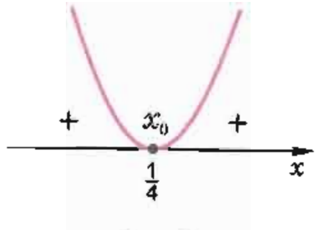


Рис. 13

Ответ: $\frac{1}{4}$.

Способ **2.**

$$4x^2 - 2x + \frac{1}{4} \leqslant 0,$$

$$\left(2x - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant 0,$$

$$\left(2x - \frac{1}{2}\right)^2 < 0 \text{ или } \left(2x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0.$$

Так как значение выражения $\left(2x - \frac{1}{2}\right)^2$ не может быть отрицательным, то $\left(2x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$.

Следовательно, $2x - \frac{1}{2} = 0$, т. е. $x = \frac{1}{4}$.

Ответ: $\frac{1}{4}$.

Пример 3. Решить неравенство

$$-25x^2 + 30x - 9 > 0.$$

Решение. *Способ* **1.**

$$-25x^2 + 30x - 9 > 0,$$

умножив обе части неравенства на -1, получим

$$25x^2 - 30x + 9 < 0,$$
$$D = (-30)^2 - 4 \cdot 25 \cdot 9 = 0,$$
$$a = 25 > 0,$$
$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \text{ т. е. } x_0 = \frac{30}{50} = \frac{3}{5}.$$

Парабола $y = 25x^2 - 30x + 9$ касается оси Ox, и ее ветви направлены вверх (рис. 14; поясните, почему точка x_0 отмечена светлым кружком).

Ответ: решений нет.

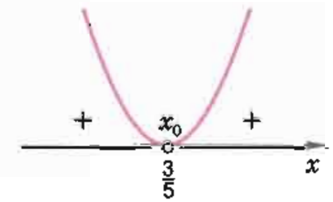


Рис. 14

Способ **2.**

$$-25x^2 + 30x - 9 > 0,$$
$$25x^2 - 30x + 9 < 0,$$
$$(5x - 3)^2 < 0.$$

Так как $(5x - 3)^2 \geqslant 0$ при любых значениях x, то неравенство $(5x - 3)^2 < 0$, а значит, и данное неравенство не имеет решений.

Ответ: решений нет.

Способ **3.**

$$-25x^2 + 30x - 9 > 0,$$
$$D = 30^2 - 4 \cdot (-25) \cdot (-9) = 0,$$
$$a = -25 < 0,$$
$$x_0 = \frac{-30}{2 \cdot (-25)} = \frac{3}{5}.$$

Парабола $y = -25x^2 + 30x - 9$ касается оси Ox, и ее ветви направлены вниз (рис. 15).

Ответ: решений нет.

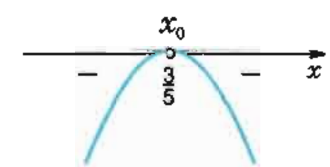


Рис. 15

1. В каком случае квадратное неравенство $ax^2 + bx + c \leqslant 0$ с дискриминантом, равным нулю, имеет единственное решение?
2. В каком случае квадратное неравенство $ax^2 + bx + c > 0$ с дискриминантом, равным нулю, не имеет решений?
3. В каком случае решением квадратного неравенства $ax^2 + bx + c < 0$ с дискриминантом, равным нулю, является любое число?
4. В каком случае квадратное неравенство $ax^2 + bx + c > 0$ с дискриминантом, равным нулю, имеет бесконечно много решений?

Упражнения

1.25. Докажите, что числа -2, -1, 0, $\frac{1}{3}$ являются решениями неравенства $3x^2 + 5x - 2 \leqslant 0$.

1.26. Докажите, что при любых значениях k, при которых дробь имеет смысл, ее значение будет неотрицательным:

1) $\frac{(k-3)^4}{10^0}$; 2) $\frac{k^2+6k+9}{(-2)^4}$;

3) $\frac{25k^2-30k+9}{(-3)^{12}(k^2+6)}$; 4) $\frac{1+49k^2-14k}{(k^2+21)(-2)^6}$;

5) $\frac{(-3-k^2)(-9)^{80}}{-9k^2-1+6k}$; 6) $\frac{-36k^2-36}{(-5)^3(4-3k)^2}$.

Решите неравенство (1.27—1.28).

1.27°. 1) $x^2 + 16 - 8x > 0$; 2) $x^2 + 12x + 36 \geqslant 0$;

3) $9x^2 - 30x + 25 < 0$; 4) $16x^2 - 8x + 1 > 0$;

5) $x^2 - 6x > -9$; 6) $9x^2 > -6x - 1$;

7) $4x^2 > 4x - 1$; 8) $-2x^2 \leqslant 4{,}5 - 6x$;

9) $\frac{1}{4}x^2 - 2x \geqslant -4$; 10) $\frac{1}{6}x^2 + x \geqslant -\frac{3}{2}$.

1.28°. 1) $-x^2 + 2x - 1 \leqslant 0$; 2) $-x^2 - 10x - 25 < 0$;

3) $-x^2 + 6x - 9 < 0$; 4) $-4x^2 - 12x - 9 < 0$;

5) $-\frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{3}x - 4 < 0$; 6) $-x^2 + x - \frac{1}{4} < 0$;

7) $x^4 - 12x^2 + 36 > 0$; 8) $16x^4 - 24x^2 + 9 \leqslant 0$.

1.29. Найдите все значения x, при которых будут неположительными значения функции:

1) $y = x^2 - 10x + 25$; 2) $y = -x^2 + 6x - 9$;

3) $y = -\frac{1}{6}x^2 - 2x - 6$; 4) $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - 2\frac{1}{4}$.

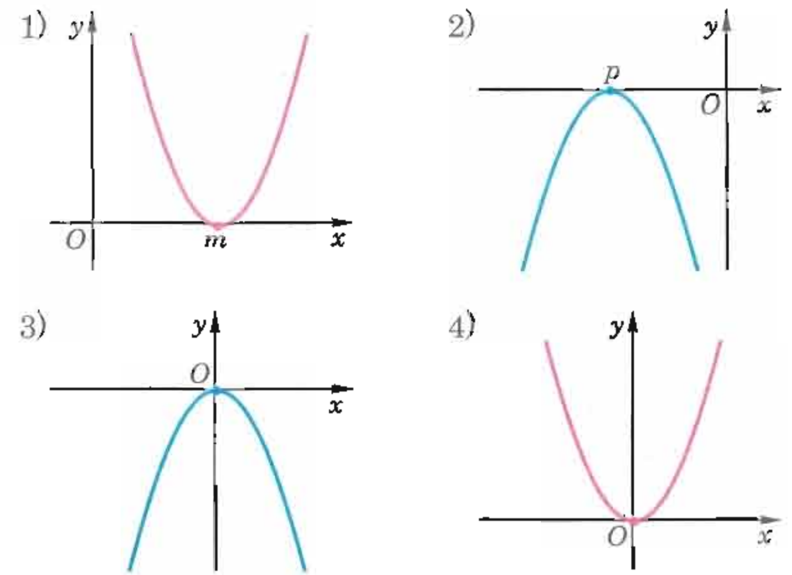


Рис. 16

1.30. На рисунке 16 изображен график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$. Укажите, при каких значениях x значения y:

а) положительны; б) отрицательны;

в) неотрицательны; г) неположительны;

д) равны нулю; е) отличны от нуля.

1.31. Решите неравенство:

1) $(25x^2 - 10x + 1)(9 - 3x) < 0$;

2) $(49x^2 + 14x + 1)(15 - 25x) > 0$;

3) $(x^2 + 2x + 1)(-x^2 + 2x - 1)(8x + 2) < 0$;

4) $(x^2 - 8x + 16)(-4x^2 - 4x - 1)(7x - 28) > 0$;

5)* $(x^4 - 18x^2 + 81)(x^2 - 2x + 3)(0{,}1x + 5) > 0$;

6)* $(x^4 + 6x^2 + 9)(-x^2 + 4x - 6)(0{,}3x - 12) < 0$.

1.32*. При каких значениях p любое значение x является решением неравенства:

1) $x^2 + 2px + p^2 \geqslant 0$; 2) $x^2 - 2px + p^2 > 0$;

3) $px^2 + 2p^2x + p^3 < 0$; 4) $px^2 - 2p^2x + p^3 \leqslant 0$;

5) $p^2x^2 - 2p^3x + p^4 > 0$; 6) $p^2x^2 + 2p^4x + p^5 \geqslant 0$?

1.4. Квадратные неравенства с положительным дискриминантом

Рассмотрим решение неравенств вида

$$ax^2 + bx + c > 0$$
$$(ax^2 + bx + c \geqslant 0,\ ax^2 + bx + c < 0,\ ax^2 + bx + c \leqslant 0),$$

где $a > 0$; $D = b^2 - 4ac > 0$.

Пример 1. Решить неравенство

$$2x^2 + x - 6 < 0. \qquad (1)$$

Решение. Имеем $D = 49 > 0$; $a = 2 > 0$.

Изобразим на координатной плоскости параболу $y = 2x^2 + x - 6$. Точка $(0; -6)$ принадлежит оси Oy. Координаты вершины: $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{4}$, $y_0 = -\frac{D}{4a} = -\frac{49}{8}$. Ветви параболы направлены вверх. Найдем абсциссы точек пересечения параболы $y = 2x^2 + x - 6$ с осью Ox. Это корни уравнения $2x^2 + x - 6 = 0$, т. е. $x_1 = -2$; $x_2 = \frac{3}{2}$ (рис. 17; напомним, что x_1 и x_2 — нули функции $y = 2x^2 + x - 6$).

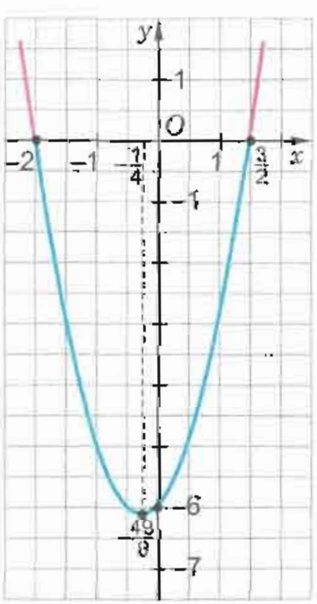


Рис. 17

Для значений x из промежутка $\left(-2; \frac{3}{2}\right)$ точки параболы расположены ниже оси Ox; значит, ординаты этих точек отрицательны, т. е. $y < 0$, таким образом, $2x^2 + x - 6 < 0$. Итак, каждое значение x из промежутка $\left(-2; \frac{3}{2}\right)$ является решением неравенства (1).

А для значений x, не принадлежащих промежутку $\left(-2; \frac{3}{2}\right)$, точки параболы расположены либо на оси Ox, либо выше ее; таким образом, ординаты этих точек неотрицательны, т. е. $y \geqslant 0$, и, значит, $2x^2 + x - 6 \geqslant 0$. Итак, каждое значение x, не принадлежащее промежутку $\left(-2; \frac{3}{2}\right)$, не является решением неравенства (1).

Ответ: $\left(-2; \frac{3}{2}\right)$.

Пример 2. Решить неравенство

$$-3x^2 + 2x + 5 \leqslant 0. \qquad (2)$$

Решение. Умножив обе части неравенства (2) на -1, получим равносильное ему неравенство

$$3x^2 - 2x - 5 \geqslant 0. \qquad (3)$$

Имеем $D = 64 > 0$; $a = 3 > 0$.

Изобразим на координатной плоскости параболу $y = 3x^2 - 2x - 5$ (рис. 18).

Для значений x из промежутка $(-\infty; -1]$ и для значений x из промежутка $\left[\frac{5}{3}; +\infty\right)$ точки параболы расположены выше оси Ox или лежат на ней $\left(\text{точки } x_1 = -1,\ x_2 = \frac{5}{3} \text{ — нули функции } y = 3x^2 - 2x - 5\right)$, т. е. ординаты этих точек $y \geqslant 0$, и, значит, $3x^2 - 2x - 5 \geqslant 0$. Таким образом, каждое значение x из множества $(-\infty; -1] \cup \left[\frac{5}{3}; +\infty\right)$ является решением неравенства (3), а следовательно, и неравенства (2).

А для значений x, не принадлежащих этому множеству, точки параболы расположены ниже оси Ox, т. е. ординаты этих точек $y < 0$, и, значит, $3x^2 - 2x - 5 < 0$. Таким образом, каждое значение x, не принадлежащее объединению промежутков $(-\infty; -1] \cup \left[\frac{5}{3}; +\infty\right)$, не является решением неравенства (3), а следовательно, и неравенства (2).

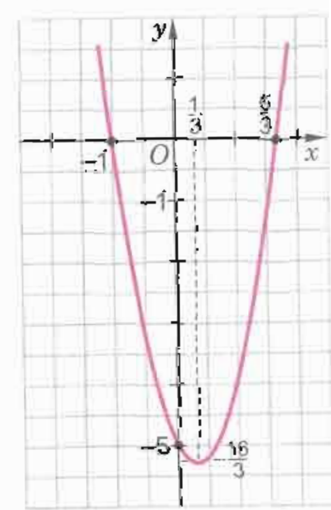


Рис. 18

Ответ: $(-\infty; -1] \cup \left[\frac{5}{3}; +\infty\right)$.

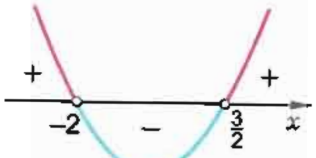


Рис. 19

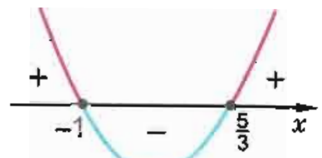


Рис. 20

Заметим, что при решении неравенств в примерах 1 и 2 нас интересовало расположение параболы относительно оси абсцисс. Поэтому в процессе решения подобных неравенств можно ограничиваться упрощенными вспомогательными рисунками (рис. 19, рис. 20). Поясните, почему на рисунке 19 точки x_1 и x_2 на оси Ox отмечены светлыми кружками, а на рисунке 20 — черными.

Пример 3. Решить неравенство:

а) $x^2 - 121 \leqslant 0$;

б) $x^2 - 7 > 0$.

Решение. *Способ 1.* Представим неравенства в виде: а) $x^2 \leqslant 121$; б) $x^2 > 7$ и решим их, как показано в примере 4 п. 1.1.

Способ 2. а) Поскольку для функции $y = x^2 - 121$ имеем $a = 1 > 0$, $x_1 = -11$, $x_2 = 11$, то парабола пересекает ось Ox в двух точках x_1, x_2, и значения $y \leqslant 0$ получаем при $-11 \leqslant x \leqslant 11$, т. е. при любом $x \in [-11; 11]$ (рис. 21).

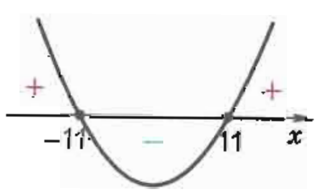


Рис. 21

Ответ: $[-11; 11]$.

б) Имеем: $a = 1 > 0$, $x_1 = -\sqrt{7}$, $x_2 = \sqrt{7}$ — нули функции $y = x^2 - 7$; парабола пересекает ось Ox в точках x_1 и x_2, а значения $y > 0$ получаем при $x < -\sqrt{7}$ и при $x > \sqrt{7}$, т. е. при любом $x \in (-\infty; -\sqrt{7}) \cup (\sqrt{7}; +\infty)$ (рис. 22).

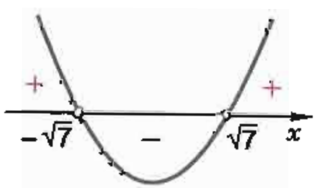


Рис. 22

Ответ: $(-\infty; -\sqrt{7}) \cup (\sqrt{7}; +\infty)$.

Пример 4*. Решить неравенство:

$$\frac{(5-2x)(x-7)}{x^2+49} \geqslant 0.$$

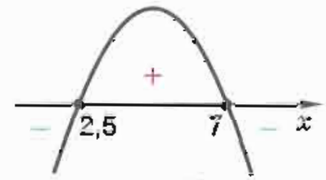


Рис. 23

Решение. Поскольку при любом значении x значение знаменателя $x^2 + 49$ положительно, то данное неравенство равносильно неравенству $(5 - 2x)(x - 7) \geqslant 0$.

Парабола $y = (5 - 2x)(x - 7)$ пересекает ось Ox в точках $x_1 = 2{,}5$, $x_2 = 7$, и ее ветви направлены вниз ($a = -2 < 0$), поэтому $y \geqslant 0$ при $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, т. е. при любом $x \in [2{,}5; 7]$ (рис. 23).

Ответ: $[2{,}5; 7]$.

С другим способом решения квадратных неравенств с положительным дискриминантом мы познакомимся в следующем пункте.

Возможные случаи решения строгих и нестрогих квадратных неравенств помещены в таблицах на форзаце 1.

1. Пусть x_1 и x_2 — нули функции $y = ax^2 + bx + c$. Верно ли, что промежуток $(x_1; x_2)$ является множеством решений квадратного неравенства $ax^2 + bx + c > 0$, если:
   а) $a > 0$; б) $a < 0$?
2. В каком случае квадратное неравенство $ax^2 + bx + c > 0$ с положительным дискриминантом имеет бесконечно много решений?
3*. Может ли решением квадратного неравенства $ax^2 + bx + c < 0$ с положительным дискриминантом быть любое число?

Упражнения

1.33°. Используя схематичное изображение параболы на рисунке 24, укажите решение квадратного неравенства

а) $ax^2 + bx + c < 0$; б) $ax^2 + bx + c \geqslant 0$.

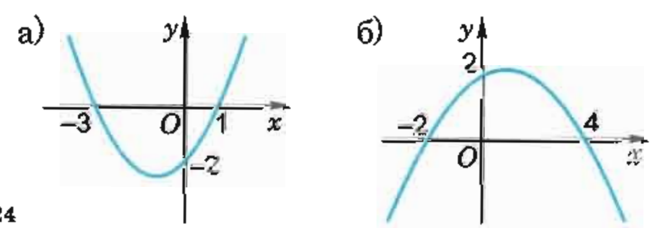


Рис. 24

Решите неравенство (1.34—1.42).

1.34°. 1) $x^2 + 2x - 3 < 0$; 2) $x^2 - 2x - 3 < 0$;
3) $x^2 + x - 2 > 0$; 4) $x^2 - x - 2 > 0$;
5) $3x^2 + 2x - 1 \geqslant 0$; 6) $2x^2 + 3x - 2 \leqslant 0$;
7) $2x^2 - 3x - 2 \leqslant 0$; 8) $4x^2 + 3x - 1 \geqslant 0$;
9) $6x^2 + 6x - 12 < 0$; 10) $3x^2 + 6x - 45 > 0$.

1.35°. 1) $-6x^2 - x + 1 < 0$; 2) $-5x^2 + 9x - 4 > 0$;
3) $-\frac{1}{4}x^2 + 2{,}25x - 2 > 0$; 4) $-\frac{1}{2}x^2 + 1\frac{1}{2}x - 1 > 0$;
5) $-10x^2 + 20x + 150 \leqslant 0$; 6) $-16x^2 + 72x - 32 \geqslant 0$.

1.36. 1) $x^2 \geqslant 25$; 2) $x^2 \leqslant 9$;
3) $4x^2 - 49 > 0$; 4) $9x^2 - 100 < 0$;
5) $x^2 \leqslant 10$; 6) $x^2 > 18$;
7) $3x^2 > 15$; 8) $7x^2 \leqslant 49$.

1.37. 1) $-x^2 + 10 \geqslant 0$; 2) $-x^2 + 18 \leqslant 0$;
3) $-x^2 + 21 < 0$; 4) $-x^2 + 23 > 0$;
5) $15 - x^2 < 0$; 6) $95 - x^2 > 0$.

1.38. 1) $x^2 > x$; 2) $x^2 < 3x$;
3) $2x^2 < x$; 4) $16x^2 > 5x$;
5) $x^2 - 4x \leqslant 0$; 6) $x^2 - 9x \geqslant 0$;
7)* $x^3 - 2x^2 > 0$; 8)* $2x^3 - 18x^2 > 0$;
9)* $27x^2 - 3x^3 \leqslant 0$; 10)* $8x^2 - 32x^3 \geqslant 0$.

1.39. 1) $12 > 2x^2 + 5x$; 2) $3x + 2 \leqslant 5x^2$;
3) $x^2 + 105 \geqslant 22x$; 4) $x^2 - 2{,}4x > 13$;
5) $x + 8 < 3x^2 - 9x$; 6) $8x - 12 \leqslant 2x^2 - 2x$.

1.40. 1) $4x^2 + 6x > 9x^2 - 15x$;
2) $13x + 7x^2 \leqslant 5x^2 + 8x$;
3) $12x^2 - 5x \geqslant 9x^2 + 7x$;
4) $8{,}5x - 3x^2 < 3{,}5x + 2x^2$.

1.41. 1) $2x^2 - 3x + 4 > x^2 + 2x - 2$;
2) $2x^2 - 2x - 7 > x^2 + 5x - 17$;
3) $(x - 5)^2 > 37 - (x - 10)^2$;

4) $(x - 3)^2 - (x - 5)^2 + (x + 4)^2 < 17x + 24$;
5) $(x - 1)^2 + (x - 2)^2 > (x - 3)^2$;
6) $(x + 4)^2 + (x + 3)^2 \leqslant (x + 5)^2$.

1.42. 1) $x^4 - 3x^3 + 2x^2 < 0$; 2) $x^4 - 3x^3 - 4x^2 > 0$;
3) $3x^4 - x^3 - 4x^2 \geqslant 0$; 4) $6x^4 - x^3 - x^2 < 0$;
5) $-2x^4 + 10x^3 - 12x^2 > 0$; 6) $-2x^4 + 3x^3 + 5x^2 \leqslant 0$.

1.43. Найдите целые решения неравенства:

1) $\frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 9} < 0$; 2) $\frac{x^2 + 12x + 35}{-x^2 - 7} > 0$;
3) $\frac{-8 - |x|}{x^2 - 5x - 6} \geqslant 0$; 4) $\frac{|x| + 6}{x^2 - 8x + 7} \leqslant 0$;
5) $\frac{3x^2 - 5x - 2}{x^2 + x + 6} \leqslant 0$; 6) $\frac{3x^2 - 7x - 6}{6x - x^2 - 18} \geqslant 0$.

1.44. Найдите все значения x, при которых квадратный трехчлен:
1) $-5x^2 + 11x - 6$ принимает положительные значения;
2) $x^2 - 2x - 15$ принимает отрицательные значения;
3) $2x^2 + 5x - 18$ принимает неотрицательные значения;
4) $-2x^2 - 3x + 5$ принимает неположительные значения.

1.45. Найдите промежутки знакопостоянства функции:

1) $y = 3x^2 - 8x + 5$; 2) $y = -2x^2 + 5x + 3$;
3) $y = -5x^2 + 9x + 2$; 4) $y = 3x^2 + 11x - 20$.

1.46. Укажите естественную область определения выражения:

1) $\sqrt{5x^2 - 6x + 1}$; 2) $\sqrt{4 + 8x - 5x^2}$;
3) $\frac{2x + 7}{\sqrt{2x^2 + 3x - 2}}$; 4) $\frac{4 - 5x}{\sqrt{2x^2 - 7x + 6}}$.

1.47. На рисунке 25 изображен график функции $y = ax^2 + bx + c$. Укажите, при каких значениях x значения y:

а) положительны; б) отрицательны;
в) неположительны; г) неотрицательны.

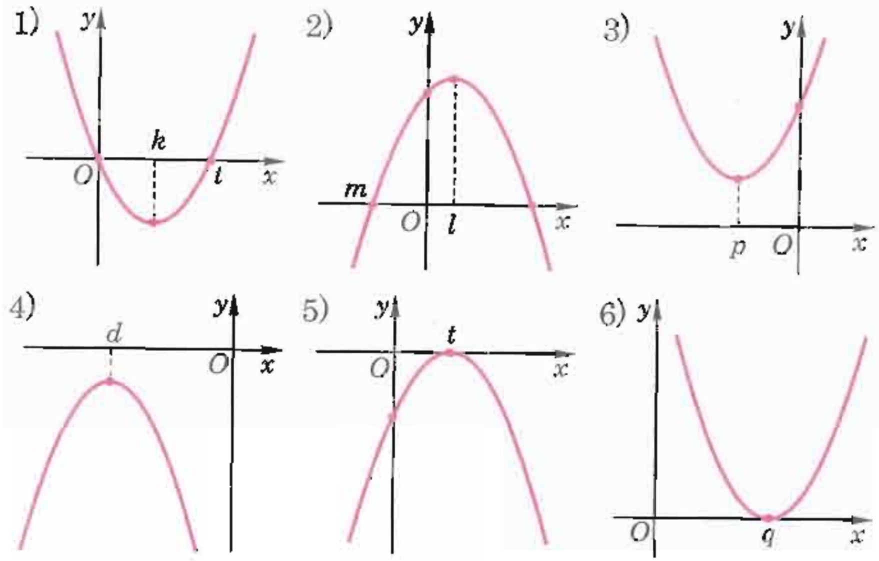


Рис. 25

Решите неравенство (1.48—1.49).

1.48. 1) $(x+5)3x-6(x+5)>0$;
2) $(x-7)5x+8(x-7)\leqslant 0$;
3) $(4-x)2x+9(4-x)<0$;
4) $(3-2x)4x-13(3-2x)\geqslant 0$.

1.49*. 1) $x^4+5x^3+8x^2+10x+12<0$;
2) $-x^4+3x^3-3x^2+3x-2>0$;
3) $x^4+4x^3+4x^2+4x+3\geqslant 0$;
4) $-x^4+6x^3-7x^2+12x-10\leqslant 0$.

1.50*. 1) При каких значениях k неравенство $x^2+6x+5k^2-6k+1>0$ верно при любых значениях x?
2) При каких значениях k неравенство $-x^2-2(k+1)x-9k+5<0$ верно при любых значениях x?

1.5. Метод интервалов

Пусть c — точка на координатной прямой. Тогда:

1) *если точка x расположена на координатной прямой слева от c, т. е. x меньше c, то выполняется неравенство* $x-c<0$ (рис. 26);

Рис. 26

2) *если точка x расположена на координатной прямой справа от c, т. е. x больше c, то выполняется неравенство* $x-c>0$ (рис. 27).

Рис. 27

Это очевидное утверждение часто позволяет выделить промежутки знакопостоянства функции, на чем основано решение неравенств ***методом интервалов***.

Пример 1. Решить неравенство

$$(x+3)(x-2)>0. \qquad (1)$$

Решение. Заметим, что решить неравенство (1) — это значит найти все те значения x, при которых функция $y=(x+3)(x-2)$ принимает положительные значения.

На координатной прямой (рис. 28) светлыми кружками (поясните почему) отметим точки $x_1=-3$, $x_2=2$ — нули этой функции, т. е. корни уравнения $(x+3)(x-2)=0$.

Эти точки определяют три промежутка:

$$(-\infty; -3),\ (-3; 2),\ (2; +\infty).$$

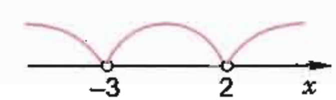


Рис. 28

(На рисунке 28 эти промежутки выделены дугами.)

> Числовые промежутки, не содержащие концов, называются ***интервалами***.

Представим себе, что точка x движется по координатной прямой слева направо, и выясним, как при этом меняются знаки значений функции y.

Пока $x<-3$, т. е. пока x принадлежит интервалу $(-\infty; -3)$ (в этом случае точка x находится слева от точек -3 и 2), оба множителя $x+3$ и $x-2$ принимают отрицательные значения, т. е.

$$x+3<0 \text{ и } x-2<0.$$

Следовательно, значение их произведения y положительно:

$$y = (x + 3)(x - 2) > 0.$$

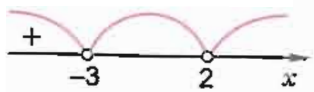


Рис. 29

На рисунке 29 это отмечено знаком «+» слева от точки -3.

После этого точка x пройдет точку -3 и окажется на интервале $(-3; 2)$. В этом случае точка x будет находиться справа от точки -3 и слева от точки 2 и значения первого множителя $x + 3$ будут положительными, а значения второго множителя $x - 2$ будут отрицательными:

$$x + 3 > 0 \text{ и } x - 2 < 0.$$

Следовательно,

$$y = (x + 3)(x - 2) < 0.$$

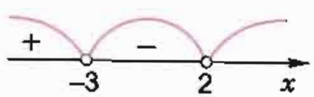


Рис. 30

На рисунке 30 это обозначено знаком «–» между точками -3 и 2.

И, наконец, когда x пройдет точку 2 и окажется на интервале $(2; +\infty)$ (в этом случае точка x находится справа от точек -3 и 2), оба множителя $x + 3$ и $x - 2$ примут положительные значения:

$$x + 3 > 0 \text{ и } x - 2 > 0.$$

Следовательно,

$$y = (x + 3)(x - 2) > 0.$$

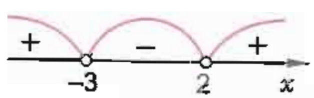


Рис. 31

На рисунке 31 это обозначено знаком «+» справа от точки 2.

Таким образом, функция y принимает положительные значения, когда x принадлежит интервалу $(-\infty; -3)$ или когда x принадлежит интервалу $(2; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$.

При решении примера 1 было установлено, что на каждом из интервалов $(-\infty; -3)$, $(-3; 2)$, $(2; +\infty)$ значения функции $y = (x + 3)(x - 2)$ имеют постоянный знак.

Напомним, что такие интервалы называются ***интервалами (промежутками) знакопостоянства функции***. Метод, которым решался этот пример, называется ***методом интервалов***.

! Решение методом интервалов строгих неравенств, правая часть которых равна нулю, заключается в следующем:

1) находят все нули функции, заданной левой частью неравенства;
2) отмечают их на координатной прямой, тем самым разбивая ее на интервалы;
3) определяют знаки значений функции на каждом из полученных интервалов (находят интервалы знакопостоянства функции);
4) выбирают интервалы, на которых значения функции имеют знак, соответствующий знаку данного неравенства;
5) записывают ответ.

Решим этим методом еще несколько примеров.

Пример 2. Решить неравенство

$$(x + 1)(x - 1)(x - 3) > 0. \quad (2)$$

Решение. Решить неравенство (2) — это значит найти все те значения x, при которых функция $y = (x + 1)(x - 1)(x - 3)$ принимает положительные значения.

На координатной прямой отметим нули функции — это точки $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$ — и выделим дугами интервалы (рис. 32).

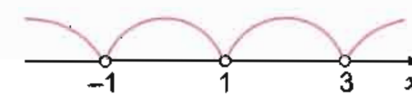


Рис. 32

Покажем, как удобно определять знаки значений функции в этих интервалах.

Выберем в одном из интервалов такое значение x, при котором проще вычислить значение y и, соответственно, его знак. Например, при $x = 0$ найдем $y = (0 + 1)(0 - 1)(0 - 3) = 1(-1)(-3) > 0$. Поскольку $0 \in (-1; 1)$, то над интервалом $(-1; 1)$ ставим знак «+» (рис. 33).

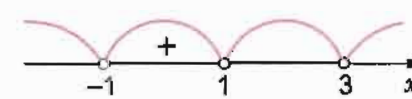


Рис. 33

Над остальными интервалами расставляем знаки («+» или «–»), учитывая, что при переходе из интервала $(-1; 1)$ в соседний интервал изменяется знак значений у одного из сомножителей, и поэтому изменяют знак на противоположный и значения функции y. Итак, знаки в интервалах в данном

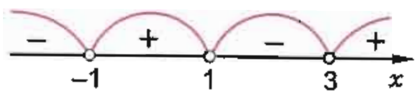


Рис. 34

примере чередуются (рис. 34). Заметим, что такое чередование знаков бывает не всегда (см. пример 3).

Таким образом, функция y принимает отрицательные значения, когда x принадлежит интервалам $(-\infty; -1)$ и $(1; 3)$, и неотрицательные значения, когда x не принадлежит этим интервалам. Значит, решения неравенства (2) — это все числа из интервалов $(-1; 1)$ и $(3; +\infty)$.

Ответ: $(-1; 1) \cup (3; +\infty)$.

В тетради решение неравенства (2) записывают коротко (часто почти без слов). Например, так:

Рассмотрим функцию $y = (x + 1)(x - 1)(x - 3)$. Нули этой функции: $x_1 = -1$; $x_2 = 1$; $x_3 = 3$. Отметим на координатной прямой интервалы знакопостоянства функции (рис. 35) и укажем, где значения $y > 0$.

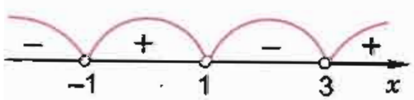


Рис. 35

Ответ: $(-1; 1) \cup (3; +\infty)$.

Пример 3. Решить неравенство

$$(x - 1)(2x^2 + 3x - 5) > 0. \qquad (3)$$

Решение. Рассмотрим функцию $y = (x - 1)(2x^2 + 3x - 5)$. Найдем ее нули, решив уравнение $y = 0$:

$$x - 1 = 0 \text{ или } 2x^2 + 3x - 5 = 0;$$
$$x_1 = 1,\ x_2 = -2{,}5.$$

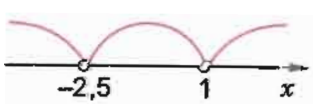


Рис. 36

Отметим на координатной прямой интервалы, ограниченные найденными нулями (рис. 36).

Знак значений функции y можно определять в какой-нибудь одной точке каждого из трех интервалов. Так, например:

при $x = -4$ получим $y = (-4 - 1)(2 \cdot (-4)^2 + 3 \cdot (-4) - 5) < 0$;
при $x = 0$ получим $y = (0 - 1)(2 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 - 5) > 0$;
при $x = 2$ получим $y = (2 - 1)(2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 - 5) > 0$.

(Обычно подобные вычисления проводят устно и в решении не записывают.)

Отметим с помощью знаков «+» и «–» интервалы знакопостоянства функции (рис. 37). В ответе укажем множество всех тех значений x, при которых значения $y > 0$.

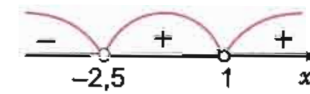


Рис. 37

Ответ: $(-2{,}5; 1) \cup (1; +\infty)$.

Заметим, что функцию $y = (x - 1)(2x^2 + 3x - 5)$ можно представить в виде $y = (x - 1)^2(2x + 5)$.

Из такой записи видно, что при переходе через точку $x = 1$ значения функции не меняют знака, поскольку множитель $(x - 1)^2$ неотрицателен при любых значениях x.

Пример 4. Решить неравенство

$$(x + 2)(2x^2 - 3x + 4) < 0.$$

Решение. Рассмотрим функцию $y = (x + 2)(2x^2 - 3x + 4)$. Найдем нули функции, решив уравнение $y = 0$:

$$x + 2 = 0 \text{ или } 2x^2 - 3x + 4 = 0.$$

Поскольку дискриминант $D < 0$, то квадратное уравнение корней не имеет и, значит, $x = -2$.

Отметим на рисунке интервалы знакопостоянства функции y (рис. 38).

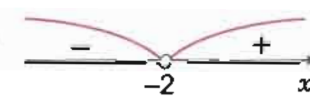


Рис. 38

Ответ: $(-\infty; -2)$.

Пример 5. Решить неравенство

$$(x^2 - 5x + 6)(x^2 - 7x + 10) \leqslant 0.$$

Решение. Рассмотрим функцию

$$y = (x^2 - 5x + 6)(x^2 - 7x + 10).$$

Найдем нули функции, решив уравнение $y = 0$:

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \text{ или } x^2 - 7x + 10 = 0,$$
$$x_1 = 2,\ x_2 = 3,\ x_3 = 5.$$

Отметим на рисунке интервалы знакопостоянства функции y (рис. 39).

Ответ: $\{2\} \cup [3; 5]$.

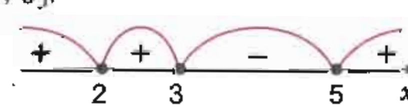


Рис. 39

Поясните, почему нули функции отмечены на рисунке 39 черными кружками и почему число 2 является решением неравенства из примера 5.

?

1. Какие числовые промежутки называют интервалами?
2. Какие интервалы называют интервалами знакопостоянства функции?
3. В чем состоит метод интервалов при решении неравенства?
4. Как можно решить квадратное неравенство, не используя метод интервалов?

Упражнения

Решите методом интервалов неравенство (1.51—1.54).

1.51°. 1) $(x+2)(x-3)>0$; 2) $(x-5)(x+4)<0$;
3) $(x-5)(x-6)\leqslant 0$; 4) $(x-2)(x-6)>0$;
5) $(x-7)\left(x+\frac{1}{8}\right)<0$; 6) $(x-5)(x-8{,}5)\leqslant 0$;
7) $(x-3{,}7)(x-4{,}8)\geqslant 0$; 8) $(x-12{,}3)(x-3{,}6)\geqslant 0$.

1.52°. 1) $(x-3)(x-4)(x-15)<0$;
2) $(x+5)(x+20)(x-15)>0$;
3) $x(x-1)(x-2)(x-5)>0$;
4) $x(x+2)(x+3)(x+6)<0$;
5) $(x-0{,}5)(x+1{,}2)(x-3{,}6)\leqslant 0$;
6) $(x+6{,}8)(x-2{,}7)(x+9{,}8)\geqslant 0$;
7) $(x-11{,}5)(x-7{,}1)(x-9{,}9)\geqslant 0$;
8) $(x-4{,}8)(x+2{,}9)(x+3{,}1)\leqslant 0$.

1.53. 1) $-(x+4{,}2)(x+6{,}4)<0$; 2) $-(x-0{,}8)(x-4)>0$;
3) $-\left(x+\frac{3}{8}\right)\left(x+\frac{1}{4}\right)>0$; 4) $-\left(x-\frac{7}{9}\right)\left(x+\frac{5}{8}\right)<0$;
5) $25(x-12)(x+10)\geqslant 0$; 6) $-13(x-8)(x-2)\leqslant 0$;
7) $-2\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{8}\right)\leqslant 0$; 8) $-14(x+6)(x-1)\geqslant 0$;
9) $-10\left(x-\frac{4}{5}\right)(x-0{,}7)\leqslant 0$;
10) $-34(x-2{,}7)\left(x-2\frac{3}{5}\right)\geqslant 0$.

1.54. 1) $(3x-5)(x+1)\geqslant 0$;
2) $(x-3)(5x-10)<0$;

3) $-(6x+5)(x-12)\geqslant 0$;
4) $-(2x-8)(x+7)\leqslant 0$;
5) $(8x+4)(3-x)(8+2x)>0$;
6) $(15x-5)(6-x)(1+10x)<0$;
7) $-2x(7x+49)(5x+8{,}5)\geqslant 0$;
8) $-5x(8-2x)(4x-0{,}5)\leqslant 0$.

1.55. Найдите естественную область определения выражения:

1) $\sqrt{(x-3)(8-2x)}$; 2) $\sqrt{(14x+7)(4-10x)}$;
3) $\sqrt{x(0{,}1x+1)(6-2x)}$; 4) $\sqrt{(8-16x)(x-9)x}$;
5) $\frac{x-9}{\sqrt{(x-4)(x-1)(x-3)x}}$; 6) $\frac{25x-3}{\sqrt{(x+1)(x-5)(x+3)x}}$.

1.56. При каких значениях x:

1) произведение $(3x-9)(2x-10)(4x-12)$ неотрицательно;
2) произведение $(2x-1)(4x+16)(5x-10)$ отрицательно;
3) произведение $(7x-49)(2x+4)(6x-12)(3x-1)$ неположительно;
4) произведение $(5x+25)(4x-1)(1-x)x$ положительно?

1.57. 1) При каких положительных значениях x верно неравенство $x^2-2x\leqslant 2$?
2) При каких отрицательных значениях x верно неравенство $x^2+2x\leqslant 1$?

1.58. 1) Найдите решения неравенства $0{,}8x^2\leqslant x+0{,}3$, принадлежащие промежутку $[0{,}2;\ 3]$.
2) Найдите решения неравенства $0{,}6x^2\leqslant 0{,}5-1{,}3x$, принадлежащие промежутку $[-0{,}4;\ 2]$.

Решите неравенство (1.59—1.61).

1.59. 1) $4x(x+2)<5$; 2) $4x(x-1)>3$;
3) $(x-3)^2>9-x^2$; 4) $4-x^2>(2+x)^2$;
5) $(x-2)(2+x)<3x^2-8$; 6) $2x^2-6<(3-x)(x+3)$;
7) $\frac{2x^2+x}{2}>\frac{x}{3}+\frac{1}{6}$; 8) $\frac{2x^2-x}{2}>\frac{3x}{5}-\frac{3}{10}$.

1.60°. 1) $x^2+8x\geqslant 0$; 2) $5x^2-x<0$;
3) $x^2-12x<0$; 4) $x^2+7x\geqslant 0$;
5) $x^3+x^2-12x\leqslant 0$; 6) $x^3-2x^2-3x>0$;
7) $4x^3-4x^2-3x>0$; 8) $2x^3-3x^2-2x\geqslant 0$;
9) $-x^3+2x^2+15x\leqslant 0$; 10) $-2x^3+7x^2-6x<0$.

1.61. 1) $2x^3+13x^2-7x<0$; 2) $6x^3-13x^2+5x>0$;
3) $-9x^3+12x^2-4x>0$; 4) $-2x^3-5x^2+18x<0$;
5) $8x-4x^2\leqslant 0$; 6) $3x^2-3x<0$;
7) $-5x^3+11x^2-6x>0$; 8) $-25x^3-30x^2-9x\geqslant 0$;
9) $-10x^3+9x^2<0$; 10) $-2x^3+7x>0$.

1.62. При каких значениях x:
1) произведение $(x+6)^2(x-1)$ положительно;
2) произведение $(x-3)^2(x+4)$ отрицательно;
3) произведение $(x+9)^2(x-7)(x+5)$ неположительно;
4) произведение $(x-1{,}4)(x+13)^2(x+2{,}7)$ неотрицательно?

Решите неравенство (1.63—1.65).

1.63. 1) $(x^2+5)(x+9)(x-4)>0$; 2) $(x^2+17)(x-3)(x+2)<0$;
3) $(x-7)^2(x-6)x>0$; 4) $(x-1)^2(x-12)2x<0$;
5) $(x^2+10)(x^2-9)<0$; 6) $(x^2+25)(x^2-16)>0$;
7) $(5+6x^2)^3(x^2-8)\geqslant 0$; 8) $(14+2x^4)(x^2-12)\leqslant 0$.

1.64. 1) $(x+8{,}2)(x^2-4)\geqslant 0$;
2) $(x-4{,}9)(x^2-9)\leqslant 0$;
3) $(x^2-1{,}9x)(x^2+16)<0$;
4) $(x^2+2{,}8x)(x^2+2{,}2)>0$;
5) $(x-0{,}8)^2(x^2-0{,}64)<0$;
6) $(x+2{,}1)^2(x^2-0{,}01)>0$;
7) $(x^2-16x+64)(x^2-13)\leqslant 0$;
8) $(x^2-17)(x^2+25-10x)\leqslant 0$;
9) $(2x^2+3x+4)(x+5)\geqslant 0$;
10) $(6x-9)(-17+6x-x^2)\geqslant 0$.

1.65. 1) $(x^2+10x+25)(3x^2-2x-1)\geqslant 0$;
2) $(16x^2+1-8x)(x^2+8-6x)<0$;

3) $(x^2+5x)^2(7x^2-2-5x)\geqslant 0$;
4) $(x^4+9x^2-6x^3)(5x^2+6x+1)\leqslant 0$;
5) $(x-7)^2(x^2-2x-3)>0$;
6) $(x^2-4)^2(x^2-x-12)<0$;
7) $(x^4-9x^2)(x^2-4x-5)>0$;
8) $(16x-x^3)(25-x^2)\leqslant 0$.

1.66. 1) Дана функция $y=(x-5)^3(x-1)^4x^2$. Найдите все значения x, при которых:

а) $y<0$; б) $y>0$; в) $y\leqslant 0$;
г) $y\geqslant 0$; д) $y=0$; е) $y\neq 0$.

2) Дана функция $y=(x+1)^4(x+2)^3x^2(x+1)$. Найдите все значения x, при которых:

а) $y>0$; б) $y\geqslant 0$; в) $y<0$;
г) $y\leqslant 0$; д) $y=0$; е) $y\neq 0$.

1.67. 1) При каких значениях x значения квадратного трехчлена $-5x^2+11x+2$ будут меньше $-0{,}4$?
2) При каких значениях x значения квадратного трехчлена $-3x^2+8x+2{,}7$ будут больше $-0{,}3$?
3) При каких значениях x значения функции $y=0{,}5x^2-1{,}5x-9$ меньше, чем значения функции $y=-2x+6$?
4) При каких значениях x значения функции $y=0{,}5x^2+4$ больше, чем значения функции $y=-1{,}5x^2+7x-1$?

1.68*. 1) При каких значениях p уравнение $2px^2-(p+3)x+2=0$ имеет два различных корня?
2) При каких значениях a неравенство $x^2+2(-3)x+5a-24>0$ выполняется при любых значениях x?

Решите неравенство (1.69—1.74).

1.69. 1) $(x-2)^2(x^2-5)<(x-2)^2(16-4x)$;
2) $(x-5)^4(x^2-8)(x-1)<(x^2-3x+2)(x-5)^4$;
3) $(x-4)^3(x+6)(6x+45)<(x-4)^3(x-6)^2$;
4) $(x-7)^3(x^2-12x+36)\geqslant (x-7)^3(6-x)$.

1.70*. 1) $|x^2+4x|>5$; 2) $|x^2+5x|<6$;
3) $|4x^2-x-1|\leqslant 2$; 4) $|2x^2-7x+9|\geqslant 3$.

1.71*. 1) $x^2-|x|-90<0$; 2) $x^2-5|x|+6\geqslant 0$;
3) $7|x|-2x^2-6\geqslant 0$; 4) $20+11|x|-3x^2<0$.

1.72*. 1) $|x^2-25|(x^2-4)\leqslant 0$;
2) $|x^2-16|(x^2-49)\geqslant 0$;
3) $|x^2-1|(x^2-7x+12)>0$;
4) $|x^2-4|(x^2-x-12)<0$;
5) $|x^2-36|(x^2+|x|-30)\geqslant 0$;
6) $|x^2-64|(x^2+|11x|+30)\leqslant 0$.

1.73*. 1) $|x^2+4x+4|<5x+10$;
2) $|x^2-16x+64|>4x-32$;
3) $x^2-6x+9>3|x-3|$;
4) $x^2+20x+100<|7x+70|$.

1.74*. 1) $|x^2-5x|\geqslant x$;
2) $|x^2+7x|\leqslant 3x$;
3) $|x^2-4x-45|<|2x-18|$;
4) $|x^2+12x-64|>|3x-12|$;
5) $|2x^2-3x+1|\leqslant|3x-3|$;
6) $|10x^2-15x+25|>|33x-29|$.

1.6. Рациональные неравенства

Пусть A и B — многочлены от одной и той же переменной. Неравенства вида

$$\frac{A}{B}>0\ \left(\frac{A}{B}\geqslant 0,\ \frac{A}{B}<0,\ \frac{A}{B}\leqslant 0\right)$$

называются ***рациональными***.

Например, неравенства

$$\frac{2x^2+3x}{x^2-1}\leqslant 0;\qquad \frac{2x^2+3}{5x-1}>0;\qquad \frac{3x^2-4x+1}{4x^3+3x-7}\geqslant 0$$

рациональные.

Теорема. Пусть A и B — многочлены от одной и той же переменной x. Тогда неравенства

$$\frac{A}{B}>0 \text{ и } AB>0\ \left(\frac{A}{B}<0 \text{ и } AB<0\right)$$

равносильны.

▲ **Доказательство.** Каждое из числовых неравенств $\frac{a}{b}>0$ и $ab>0$ означает, что a и b — числа одного знака. Поэтому, если $\frac{a}{b}>0$, то $ab>0$ и наоборот, если $ab>0$, то $\frac{a}{b}>0$.

Из этого простого факта следует, что если при некотором значении переменной x значение дроби $\frac{A}{B}>0$, то и значение произведения $AB>0$. И наоборот, если значение произведения $AB>0$, то и значение дроби $\frac{A}{B}>0$.

Значит, неравенства $\frac{A}{B}>0$ и $AB>0$ равносильны. ⊠ ▲

Разумеется, неравенства $\frac{A}{B}<0$ и $AB<0$ также равносильны. А вот неравенства $\frac{A}{B}\geqslant 0$ и $AB\geqslant 0$ $\left(\frac{A}{B}\leqslant 0 \text{ и } AB\leqslant 0\right)$ могут быть и неравносильными.

Если при некотором значении переменной x значение дроби $\frac{A}{B}\geqslant 0$, то и значение произведения $AB\geqslant 0$.

(Рассмотрите самостоятельно два случая: $\frac{A}{B}>0$ и $\frac{A}{B}=0$.)

Но обратное утверждение неверно, т. е. из того, что $AB\geqslant 0$, не следует, что $\frac{A}{B}\geqslant 0$. Действительно, может случиться, что при некотором значении переменной x значение $B=0$. Тогда $AB=0$, а выражение $\frac{A}{B}$ не имеет смысла.

Рассмотрим несколько примеров решения рациональных неравенств.

Пример 1. Решить неравенство

$$\frac{(x-1)(x-3)}{2x-5}>0. \qquad (1)$$

Решение. Решим его методом интервалов.

Способ 1. Согласно теореме, неравенство (1) равносильно неравенству $(x-1)(x+3)(2x-5)>0$.

Рассмотрим функцию $y=(x-1)(x+3)(2x-5)$ (ее область определения — множество $\boldsymbol{R}$).

Нули функции $x_1=1$, $x_2=-3$, $x_3=2{,}5$ отметим на координатной прямой светлыми кружками, поскольку они не могут быть решениями строгого неравенства (1) (рис. 40).

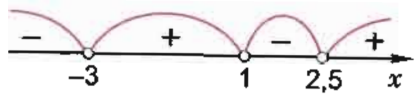


Рис. 40

Знаками «+» и «–» отметим промежутки знакопостоянства функции (почему эти знаки чередуются?).

Ответ: $(-3;\ 1)\cup(2{,}5;\ +\infty)$.

Способ 2. Решение неравенства (1) методом интервалов можно оформить несколько иначе.

Рассмотрим функцию $y=\frac{(x-1)(x+3)}{2x-5}$; ее область определения — значения $x\neq 2{,}5$ (точку $x=2{,}5$ отметим на координатной прямой светлым кружком, потому что она не входит в область определения функции). Из уравнения $y=0$ найдем нули функции: $x_1=1$, $x_2=-3$ (их также отметим светлыми кружками, объясните почему).

Промежутки знакопостоянства этой функции можно определить, подставляя вместо x какое-нибудь значение в каждом из четырех образовавшихся интервалов (см. рис. 40).

Ответ: $(-3;\ 1)\cup(2{,}5;\ +\infty)$.

Используя рисунок 40, можно указать ответ и к неравенству $\frac{(x-1)(x+3)}{2x-5}<0$ (сделайте это самостоятельно).

Пример 2. Решить неравенство

$$\frac{(x-1)(x+3)}{2x-5}\geqslant 0. \qquad (2)$$

Решение. По определению нестрогого неравенства неравенство (2) равносильно утверждению:

$$\frac{(x-1)(x+3)}{2x-5}>0 \text{ или } \frac{(x-1)(x+3)}{2x-5}=0.$$

Решив строгое неравенство методом интервалов, получим, что ему удовлетворяют все значения $x\in(-3;\ 1)\cup(2{,}5;\ +\infty)$.

Корни уравнения: $x_1=1$, $x_2=-3$.

Объединив решения уравнения и строгого неравенства, получим решение неравенства (2):

$$[-3;\ 1]\cup(2{,}5;\ +\infty).$$

Ответ: $[-3;\ 1]\cup(2{,}5;\ +\infty)$.

Пример 3. Решить неравенство

$$\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}\geqslant 0. \qquad (3)$$

Решение. Рассмотрим функцию $y=\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}$; ее область определения — все значения x, при которых $x^2-7x+10\neq 0$, т. е. $x\neq 2$ и $x\neq 5$ (точки 2 и 5 отметим на рисунке светлыми кружками, так как они не входят в область определения функции).

Нули этой функции — те значения x из ее области определения, при которых $y=0$, т. е. $x^2-5x+6=0$.

Решив это уравнение, имеем $x=2$ или $x=3$. Но поскольку число 2 не входит в область определения функции, то $x=3$ — единственный нуль (на рисунке 41 точку 3 отмечаем черным кружком; объясните почему).

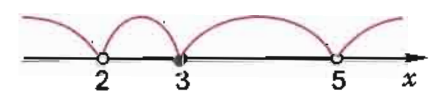


Рис. 41

В каждом из образовавшихся четырех интервалов определяем знак значения функции, подставляя вместо x любое число из этого интервала. Так, при $x=1$ получаем $y=\frac{1-5+6}{1-7+10}>0$ и поэтому над первым интервалом $(-\infty;\ 2)$ ставим знак «+».

При $x=2{,}5$ получаем

$$y=\frac{2{,}5^2-5\cdot 2{,}5+6}{2{,}5^2-7\cdot 2{,}5+10}=\frac{6{,}25-12{,}5+6}{6{,}25-17{,}5+10}>0,$$

поэтому и над вторым интервалом $(2;\ 3)$ ставим знак «+».

Аналогично, при $x=4$ получаем $y<0$, а при $x=6$ имеем $y>0$ (убедитесь в этом), поэтому над третьим интервалом $(3;\ 5)$

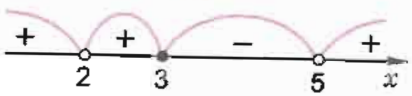


Рис. 42

ставим знак «−», а над четвертым $(5; +\infty)$ — знак «+» (рис. 42).

Используя этот рисунок, записываем ответ к неравенству (3), т. е. те значения x, при которых $y \geqslant 0$.

Ответ: $(-\infty; 2) \cup (2; 3] \cup (5; +\infty)$.

Пример 4. Решить неравенство

$$\frac{(x+3)^6(7-2x)^7}{x(2-x)} \geqslant 0. \qquad (4)$$

Решение. *Способ 1.* Рассмотрим функцию

$y = \frac{(x+3)^6(7-2x)^7}{x(2-x)}$; ее область определения: $x \neq 0$ и $x \neq 2$.

Нули функции: $x_1 = -3$, $x_2 = 3{,}5$.

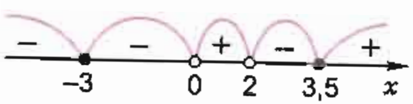


Рис. 43

На рисунке 43 отметим промежутки знакопостоянства функции y и укажем те из них, где значения $y \geqslant 0$.

Ответ: $\{-3\} \cup (0; 2) \cup [3{,}5; +\infty)$.

! Объясните, почему в соседних интервалах $(-\infty; -3)$ и $(-3; 0)$ функция y имеет значения одинаковых знаков и почему эти интервалы не включены в ответ, а число -3 включено в ответ к неравенству (4).

Способ 2. Неравенство (4) равносильно системе

$$\begin{cases}(x+3)^6(7-2x)^7x(2-x) \geqslant 0,\\ x(2-x) \neq 0.\end{cases}$$

Рассмотрим функцию $y = (x+3)^6(7-2x)^7x(2-x)$ при $x \neq 0$ и $x \neq 2$.

Ее нули $x_1 = -3$, $x_2 = 3{,}5$ отметим на координатной прямой черными кружками, а точки $x_3 = 0$ и $x_4 = 2$ — светлыми (объясните почему). Укажем на рисунке 43 промежутки знакопостоянства рассматриваемой функции и выпишем те значения x, при которых $y \geqslant 0$.

Ответ: $\{-3\} \cup (0; 2) \cup [3{,}5; +\infty)$.

Заметим, что, используя рисунок 43, можно записать и ответ к неравенству

$$\frac{(x+3)^6(7-2x)^7}{x(2-x)} \leqslant 0, \qquad (5)$$

сделайте это. Поясните, почему ответ к неравенству (5) можно записать так:

$$(-\infty; 0) \cup (2; 3{,}5].$$

! Итак, при решении неравенств методом интервалов устанавливают промежутки знакопостоянства некоторой функции. Нули этой функции включаются в решения неравенства, если оно нестрогое.

Пример 5. Решить неравенство

$$\frac{1}{x} \leqslant \frac{x}{x+6}. \qquad (6)$$

Решение. Неравенство (6) равносильно неравенству

$$\frac{x^2-x-6}{x(x+6)} \geqslant 0. \qquad (7)$$

Решим неравенство (7) методом интервалов.

Рассмотрим функцию $y = \frac{x^2-x-6}{x(x+6)}$; ее область определения $x \neq 0$ и $x \neq -6$, а ее нули — числа -2 и 3. Отметим на координатной прямой промежутки знакопостоянства этой функции и укажем те из них, где значения $y \geqslant 0$ (рис. 44).

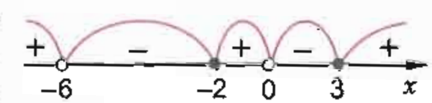


Рис. 44

Ответ: $(-\infty; -6) \cup [-2; 0) \cup [3; +\infty)$.

?

1. Какие неравенства называются рациональными?
2. Какое неравенство равносильно неравенству $\frac{A}{B} > 0$?
3. Верно ли, что равносильны утверждения:

а) $\frac{A}{B} \geqslant 0$ и $AB \geqslant 0$;

б) $\frac{A}{B} \leqslant 0$ и ($AB < 0$ или $AB = 0$);

в) $\frac{A}{B} \geqslant 0$ и $\left(AB > 0 \text{ или } \frac{A}{B} = 0\right)$;

г) $\frac{A}{B} \leqslant 0$ и $\left(AB < 0 \text{ или } \begin{cases} A = 0, \\ B \neq 0 \end{cases}\right)$;

д) $\frac{A}{B} \geqslant 0$ и $\begin{cases} AB \geqslant 0, \\ B \neq 0? \end{cases}$

4. Как решать методом интервалов:
   а) строгое рациональное неравенство;
   б) нестрогое рациональное неравенство?

Упражнения

1.75°. Решите неравенство:

1) $\frac{x-7}{x+3} < 0$; 2) $\frac{x+4}{x-1} > 0$; 3) $\frac{2x}{x-2,4} \leqslant 0$;

4) $\frac{5x}{x+8,6} \geqslant 0$; 5) $\frac{5,3-x}{x+2,7} < 0$; 6) $\frac{4,9-x}{x-3,6} > 0$;

7) $\frac{5x-4,5}{3-1,2x} \leqslant 0$; 8) $\frac{10-2,5x}{9x-8,1} \geqslant 0$;

9) $\frac{6x-2}{3,8-1,9x} < 0$; 10) $\frac{13x+26}{15-3x} > 0$.

1.76°. При каких значениях x значение дроби будет положительным:

1) $\frac{x-2}{x+4}$; 2) $\frac{x+8}{x-7}$; 3) $\frac{6-x}{x-11}$; 4) $\frac{5-2x}{x}$?

1.77°. При каких значениях x значение дроби будет отрицательным:

1) $\frac{x-12}{x+12}$; 2) $\frac{3x}{x-8}$; 3) $\frac{5x-3}{x+1}$; 4) $\frac{7-x}{2x+4}$?

Решите неравенство (1.78—1.85).

1.78°. 1) $\frac{(x+11)(x-12)}{(x-4)(x+8)} > 0$; 2) $\frac{(x-6)(x+2)}{(x+16)(x+20)} < 0$;

3) $\frac{(x-1)(x+5)}{(x+14)(x-7)} < 0$; 4) $\frac{(x+1)(x-3)}{(x+6)(x+9)} > 0$;

5) $\frac{(x+4)(x-21)}{(x-19)(x-13)} \geqslant 0$; 6) $\frac{(x-5)(x+7)}{(x-15)(x+3)} \leqslant 0$;

7) $\frac{(x+16)(x+10)}{(x+18)(x-7)} \leqslant 0$; 8) $\frac{(x-29)(x-20)}{(x-9)(x-26)} \geqslant 0$.

1.79. 1) $\frac{(3-x)(x-1)}{(x+8)(x+1)} > 0$; 2) $\frac{(x+3)(x-5)}{(x-9)(6-x)} < 0$;

3) $\frac{(x-1,7)(x+1,5)}{(3x-1)(x+1)} \leqslant 0$; 4) $\frac{(x+3,2)(x-2,3)}{(4x-8)(5+x)} \geqslant 0$;

5) $\frac{(5x-3)(15-4x)}{(x+8)(2x-1)} \geqslant 0$; 6) $\frac{(2x-5)(3x+7)}{(4-x)(6x+6)} \leqslant 0$;

7) $\frac{(5-x)(3x-1)}{(2x+8)(7x+8)} < 0$; 8) $\frac{(3x+4)(14-28x)}{(9x-27)(6x-30)} > 0$.

1.80. 1) $\frac{x^2-7x+12}{x-1} \geqslant 0$; 2) $\frac{12+x-x^2}{x+5} < 0$;

3) $\frac{x^2-3x+2}{x^2+8x+15} < 0$; 4) $\frac{x^2-12x+11}{x^2+2x-8} \geqslant 0$;

5) $\frac{6x^2-17x+5}{3x^2+8x-3} \geqslant 0$; 6) $\frac{3x^2-10x-8}{5x^2+6x+1} < 0$.

1.81. 1) $\frac{x^2-3x+8}{-x^2+x-1} > 0$; 2) $\frac{x^2-6x+10}{-x^2+10x-30} < 0$;

3) $\frac{x^2+4x+5}{-x^2-16+8x} \leqslant 0$; 4) $\frac{2x^2-4x+13}{-4x^2-12x-9} \geqslant 0$;

5) $\frac{4x^2-9x+7}{-x^2-64+10x} \geqslant 0$; 6) $\frac{-11+8x-2x^2}{x^2+0,25+x} \leqslant 0$.

1.82. 1) $\frac{(x^2-9)(1-x)}{x^2+1+2x} > 0$; 2) $\frac{x^2+8x+7}{9-x^2} < 0$;

3) $\frac{x^2+6x+9}{5-x^2+4x} \leqslant 0$; 4) $\frac{x^2-15x-16}{1+4x+4x^2} \geqslant 0$;

5) $\frac{x^2+6x+10}{(x^2-16)(x+7)} < 0$; 6) $\frac{(x^2-81)(x-5)}{x^2-7x+18} > 0$;

7) $\frac{x^2+5x-14}{x^2-2x+8} \geqslant 0$; 8) $\frac{x^2-5x+40}{x^2+x-20} \leqslant 0$.

1.83. 1) $\frac{(x-6)^2(x+1)(x-9)}{(x-7)^4(x+3)} > 0$; 2) $\frac{(x-4)(x-8)^2}{(x+8)(x+4)(x-3)^2} < 0$;

3) $\frac{(x+1)(x-5)}{(x-7)^2(x+10)^2(x+7)} \geqslant 0$; 4) $\frac{(x-12)^2(x+15)^2}{(x+6)(x+2)(x-2)} \leqslant 0$;

5) $\frac{(x^2+x)(x^2-x)}{5x-1} > 0;$ 6) $\frac{8-x}{(x^2-2x)(x^2+2x)} < 0;$

7) $\frac{(x^4-16)(x^2-100)}{121+x^2-22x} \leqslant 0;$ 8) $\frac{49+x^2-14x}{(x^4-81)(x^2-25)} \geqslant 0.$

1.84. 1) $\frac{1}{x} \geqslant 1;$ 2) $\frac{1}{x} \leqslant 1;$

3) $\frac{1}{x} > -1;$ 4) $\frac{1}{x} < -1;$

5) $\frac{2}{x^2} \leqslant 1;$ 6) $\frac{4}{x^2} \geqslant 1;$

7) $\frac{3x-1}{2x+5} < 3;$ 8) $\frac{2x-1}{5+3x} > -2;$

9) $\frac{5-2x}{3x^2-2x-16} \geqslant 1;$ 10) $\frac{5-4x}{3x^2-x-4} \leqslant 4.$

1.85. 1) $\frac{x+1}{1-x} + \frac{x-1}{x} < 2;$ 2) $\frac{8-x}{x-10} - \frac{12}{(2-x)\cdot 7} > 1;$

3) $\frac{(x-6)^2}{4} - \frac{(x-7)^2}{3} < -\frac{11x}{18} - \frac{(2x-3)(x+2)}{12};$

4) $\frac{(x+3)(x+7)}{2} + 6x > \frac{8-2x}{5} - \frac{(3+5x)^2}{2}.$

Укажите естественную область определения выражения (1.86—1.87).

1.86°. 1) $\frac{x^2+2x-15}{\sqrt{144-9x^2}};$ 2) $\frac{16-24x-9x^2}{\sqrt{x+2}};$

3) $\frac{2x-3}{\sqrt{(3x-1)(6x-2)}};$ 4) $\frac{5x+10}{\sqrt{(11x+22)(8x-2)}};$

5) $\sqrt{(3x+5)(5x^2+6x+1)};$

6) $\sqrt{(7-x)(4x^2+19x+12)};$

7) $\sqrt{\frac{2x^2-9x+4}{x^2-5x+4}};$ 8) $\sqrt{\frac{x^2-4x+3}{2x^2-3x-2}}.$

1.87. 1) $\sqrt{x-\frac{64}{x}};$ 2) $\sqrt{\frac{x}{20}-\frac{5}{x}};$

3) $\sqrt{\frac{5}{x}-\frac{3}{3-x}};$ 4) $\sqrt{\frac{10}{x}+\frac{12}{x-2}};$

5) $\sqrt{\frac{3x+2}{x^2+x-2}+1};$ 6) $\sqrt{\frac{2x-7}{x^2+2x-8}-1}.$

Решите неравенство (1.88—1.92).

1.88. 1) $\frac{x^2-6x}{|x|+2} > 0;$ 2) $\frac{|x|+9}{x^2+8x} < 0;$

3) $\frac{2x^2-5x-3}{|x-1|+8} \leqslant 0;$ 4) $\frac{|4-x|+12}{7x-2x^2-3} \geqslant 0.$

1.89. 1) $\frac{2x^2-3x-2}{|x|-3} > 0;$ 2) $\frac{x^2-6x+5}{|x|-6} < 0;$

3) $\frac{|x|-5}{x^2-6x-7} \leqslant 0;$ 4) $\frac{x^2-2x-3}{|x|-1} \geqslant 0;$

5) $\frac{x^2-|x|-12}{x-7} < 0;$ 6) $\frac{x+8}{x^2-7|x|+10} > 0.$

1.90. 1) $\left|\frac{x+4}{x-6}\right| \geqslant 2;$ 2) $\left|\frac{x+1}{x-1}\right| \leqslant 3;$

3) $\frac{|x-5|}{x+4} < 1;$ 4) $\frac{x-8}{|6-x|} > 1.$

1.91. 1) $\frac{|x^2-4x+3|}{x^2-x+2} \leqslant 1;$ 2) $\frac{|x^2-5x+4|}{x^2-x+1} \geqslant 1;$

3) $\frac{19x-2}{|x^2+5x+4|} > 2;$ 4) $\frac{19x+53}{|x^2-4x+3|} < -1.$

1.92. 1) $\frac{5}{4+|3-x|} > |3-x|;$ 2) $|x-1|-1 < \frac{3}{|x-1|+1};$

3) $|x+2| < \frac{5}{|x+2|+2} + 2;$ 4) $2|2x+1| \leqslant 2 - \frac{2}{|2x+1|+1}.$

1.93. 1) Длина прямоугольника больше 30 см, а ширина составляет $\frac{2}{3}$ его длины. Верно ли, что площадь прямоугольника больше 600 см^2?

2) Одна сторона прямоугольника больше другой на 3 дм. Найдите стороны прямоугольника, если его площадь меньше 10 дм^2.

1.7. Системы неравенств с одним неизвестным

Пусть надо найти все такие значения неизвестного x, которые являются решениями каждого из неравенств

$$2x \geqslant 5 \text{ и } 3x - 1 < 14.$$

В этом случае говорят, что надо *решить систему неравенств*

$$\begin{cases} 2x \geqslant 5, \\ 3x - 1 < 14 \end{cases}$$

(здесь фигурная скобка заменяет союз «и»).

Записанная система — это пример системы из двух линейных неравенств с одним неизвестным (с одной переменной).

А вот еще два примера. Система из линейного и квадратного неравенств с одним неизвестным

$$\begin{cases} -4x \geqslant 15, \\ 3x^2 - 4x - 15 < 0 \end{cases}$$

и система из линейного неравенства и неравенства, содержащего неизвестное под знаком модуля

$$\begin{cases} 3x - 1 \leqslant 14, \\ |x| \leqslant 3. \end{cases}$$

Определение. Пусть надо решить систему из двух неравенств с одним неизвестным x. Значения неизвестного x, которые являются решениями каждого неравенства системы, называются *решениями* этой *системы*.

***Решить систему неравенств* — это значит найти все ее решения или доказать, что их нет.**

Две системы неравенств называются *равносильными*, если каждое решение первой системы является решением второй системы и, наоборот, каждое решение второй системы является решением первой системы.

Покажем на примерах, как находят решения системы неравенств с одним неизвестным и как эти решения изображаются на рисунках.

Пример 1. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 2x \geqslant 5, \\ 3x - 1 < 14. \end{cases} \qquad (1)$$

Решение. Решив каждое из неравенств системы (1), получим равносильную ей систему

$$\begin{cases} x \geqslant 2{,}5, \\ x < 5. \end{cases}$$

Решениями этой системы являются те значения переменной x, для которых верны оба неравенства: $x \geqslant 2{,}5$ и $x < 5$. А это, как мы знаем, записывается двойным неравенством: $2{,}5 \leqslant x < 5$.

Ответ: $2{,}5 \leqslant x < 5$.

Используя обозначения для числовых промежутков, ответ, полученный при решении системы (1), можно записать и так: $[2{,}5; 5)$.

На рисунке 45 изображены решения неравенства $x \geqslant 2{,}5$ — это все значения x, расположенные справа от точки 2,5, и само число 2,5. Неравенство нестрогое, поэтому число 2,5 является его решением; на рисунке оно отмечено черным кружком.

Рис. 45

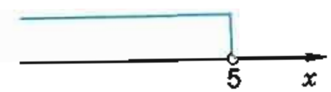


Рис. 46

На рисунке 46 изображены решения неравенства $x < 5$ — это все значения x, расположенные слева от точки 5. Неравенство строгое, поэтому число 5 не является его решением; на рисунке оно отмечено светлым кружком.

На рисунке 47 изображены решения обоих неравенств $x \geqslant 2{,}5$ и $x < 5$, а те значения переменной x, которые являются решением и одного, и другого неравенств, отмечены штриховкой, т. е. штриховкой выделены решения системы (1). Обратите внимание, что заштрихованным оказался тот участок координатной прямой, который размещен сразу под двумя

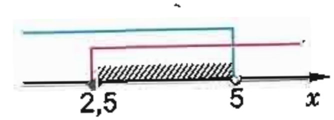


Рис. 47

линиями, отмечающими решения отдельных неравенств системы.

Заметим, что система (1) решается настолько просто, что для ее решения нет необходимости обращаться к рисунку. А вот при решении следующих примеров рисунок уже оказывает существенную помощь.

Пример 2. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} -2x \geqslant 0{,}5, \\ 3x^2 - 4x - 15 < 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Решение. Решив первое неравенство системы (2), получим

$$x \leqslant -0{,}25.$$

Решения этого неравенства изображены на рисунке 48.

Решим второе неравенство системы (2):

$$3x^2 - 4x - 15 < 0;$$
$$3(x-3)\left(x+\frac{5}{3}\right) < 0;$$
$$-\frac{5}{3} < x < 3.$$

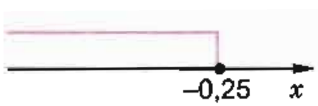


Рис. 48

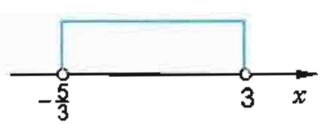


Рис. 49

Решения этого неравенства изображены на рисунке 49.

Теперь на одном рисунке линиями на двух разных уровнях над координатной прямой изобразим решения обоих неравенств системы (2). Те значения переменной x, которые являются решениями и одного, и другого неравенств, т. е. являются решениями системы (2), отмечены штриховкой (рис. 50).

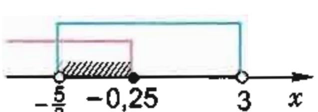


Рис. 50

Значит, решения данной системы — это $-\frac{5}{3} < x \leqslant -0{,}25$.

Ответ: $\left(-\frac{5}{3}; -0{,}25\right]$.

Записывают решение системы (2) очень коротко. Например, так:

Решение.

$$\begin{cases} -2x \geqslant 0{,}5, \\ 3x^2 - 4x - 15 < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leqslant -0{,}25, \\ -\frac{5}{3} < x < 3 \end{cases} \text{ (см. рис. 50).}$$

Ответ: $\left(-\frac{5}{3}; -0{,}25\right]$.

Пример 3. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 3x - 1 < 14, \\ |x| > 3. \end{cases} \qquad (3)$$

Решение. Решим первое неравенство системы (3) и изобразим его решение $x < 5$ на рисунке 51.

Решим второе неравенство данной системы:

$$|x| > 3;$$
$$x < -3 \text{ или } x > 3.$$

Рис. 51

Рис. 52

Изобразим эти решения на рисунке 52 (обе линии размещаем на одном уровне, так как ими отмечают решения одного неравенства $|x| > 3$).

Теперь на одном рисунке линиями на двух разных уровнях над координатной прямой изобразим решения обоих неравенств системы (3). Решения системы (3) выделены штриховкой — это те точки x на координатной прямой, которые входят в решения каждого из двух неравенств данной системы (они находятся на рисунке 53 под линиями двух уровней).

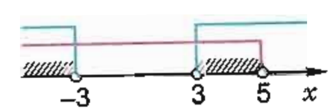


Рис. 53

Значит, решение системы (3) — это те значения x, которые удовлетворяют неравенству $x < -3$, и те значения x, которые удовлетворяют неравенству $3 < x < 5$.

Ответ: $(-\infty; -3) \cup (3; 5)$.

Запись решения в тетради можно оформить так:

Решение.

$$\begin{cases} 3x - 1 < 14, \\ |x| > 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 5, \\ (x < -3 \text{ или } x > 3) \end{cases} \text{ (см. рис. 53).}$$

Ответ: $(-\infty; -3) \cup (3; 5)$.

В системе может содержаться и более двух неравенств с одним неизвестным.

Пример 4. Решить систему неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x \geqslant 5, \\ 3x^2 - 4x - 15 < 0, \\ |x| > 3; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x \geqslant 5, \\ 3x^2 - 4x - 15 < 0, \\ |x| < 3. \end{cases}$$

Решение.

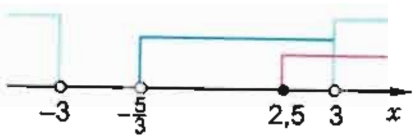


Рис. 54

а) Данная система равносильна системе неравенств

$$\begin{cases} x \geqslant 2{,}5, \\ -\frac{5}{3} < x < 3, \\ (x < -3 \text{ или } x > 3). \end{cases}$$

На рисунке 54 видно, что система не имеет решений.

Ответ: нет решений.

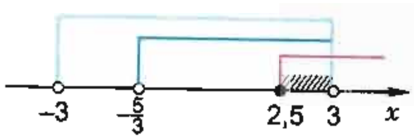


Рис. 55

б) Данная система равносильна системе неравенств

$$\begin{cases} x \geqslant 2{,}5, \\ -\frac{5}{3} < x < 3, \\ -3 < x < 3. \end{cases}$$

На рисунке 55 видно, что $2{,}5 \leqslant x < 3$.

Ответ: $[2{,}5; 3)$.

1. Что называется решением системы неравенств с одним неизвестным?
2. Что значит решить систему неравенств?
3. Какие две системы неравенств называются равносильными?

Упражнения

1.94. На рисунке 56 линиями разных уровней изображены решения неравенств некоторой системы. Перенесите рисунок в тетрадь и отметьте на нем штриховкой решения системы неравенств (если решения есть). Определите число неравенств в этой системе и укажите ответ.

1.95. Составьте какую-нибудь систему неравенств, поиск решения которой можно проиллюстрировать (см. рис. 56).

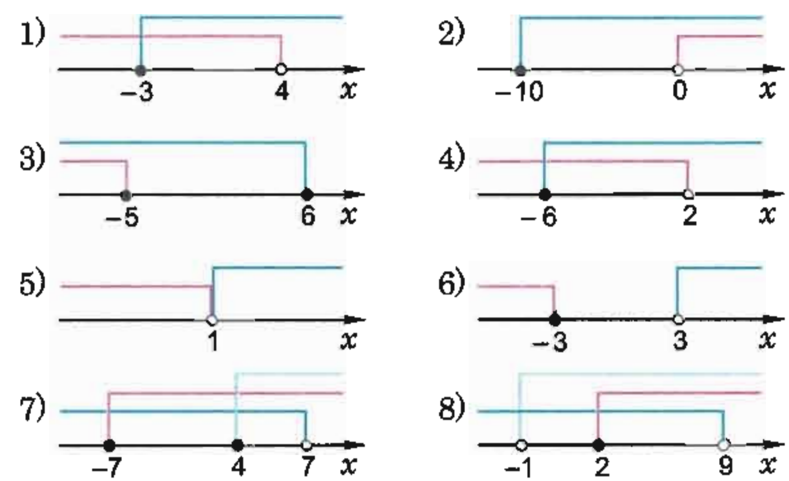


Рис. 56

1.96. Составьте какую-нибудь систему двух линейных неравенств, решением которой является промежуток:

1) $(-3; 0{,}5]$; 2) $(-\infty; 1)$;
3) $[-7; 2{,}4]$; 4) $[8; +\infty)$.

1.97. Составьте какую-нибудь систему трех линейных неравенств, решением которой является промежуток:

1) $[-2; 12]$; 2) $(-\infty; 4]$;
3) $[1; 16]$; 4) $(2; +\infty)$.

Решите систему неравенств (1.98—1.99).

1.98°. 1) $\begin{cases} 3x + 4 \leqslant 5, \\ -5x - 3 > 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x > -28, \\ 7 \leqslant -2x; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5x > 3, \\ 2x + 6 \leqslant 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x \geqslant -1, \\ 12x + 24 < 6; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 5x > 0, \\ -5x > 0; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x < 9, \\ 2x - 6 < 0. \end{cases}$

1.99. 1) $\begin{cases} 3x + 4 \leqslant 5, \\ -5x - 3 > 1, \\ |x| \geqslant 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x > -28, \\ 7 \leqslant -2x, \\ |x| \geqslant 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5x > 3, \\ 2x + 6 \leqslant 0, \\ |x| \leqslant 1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x \geqslant -1, \\ 12x + 24 < 6, \\ |x| \leqslant 1; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 5x \geqslant 0, \\ -5x > 0, \\ |x| \geqslant 4; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x < 9, \\ 2x - 6 < 0, \\ |x| \leqslant 2. \end{cases}$

1.100. 1) Укажите наибольшее целое значение x, которое является решением системы неравенств

$$\begin{cases} 2x + 10 < 1{,}5x + 20, \\ 3x + 4 < 2x + 16. \end{cases}$$

2) Укажите наименьшее целое значение x, которое является решением системы неравенств

$$\begin{cases} (x + 2)(2 - x) < (x + 3)(4 - x), \\ \frac{3 + x}{4} + \frac{1 - 2x}{6} \leqslant 1. \end{cases}$$

3) Укажите натуральные значения x, которые являются решениями системы неравенств

$$\begin{cases} \frac{x}{8} - \frac{5x - 4}{12} < \frac{x - 2}{6} - \frac{x + 1}{3} - \frac{3x}{4} + 6, \\ x - \frac{x - 1}{2} > \frac{x - 3}{4} + \frac{x + 2}{3}. \end{cases}$$

Решите систему неравенств (1.101—1.109).

1.101. 1) $\begin{cases} x^2 - 4 > 0, \\ 2x - 1 > 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - 4 > 0, \\ 3x + 1 \leqslant 2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 - 4 > 0, \\ 5x < -15; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 - 4 > 0, \\ 4x + 6 \leqslant -2; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2 - 4 > 0, \\ 6x - 5 > 7; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2 - 4 > 0, \\ 3x - 4 \geqslant 5. \end{cases}$

1.102. 1) $\begin{cases} 3x > -6, \\ x^2 - 16 \leqslant 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} -5x > 1, \\ x^2 - 16 \leqslant 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 7x \geqslant 2{,}8, \\ x^2 - 16 \leqslant 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x - 8 > 0, \\ x^2 - 16 \leqslant 0; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x + 10 > 0, \\ x^2 - 16 \leqslant 0; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 3x \leqslant 18, \\ x^2 - 16 \leqslant 0; \end{cases}$

1.103. 1) $\begin{cases} x^2 - 4x - 5 > 0, \\ 0{,}5x - 1 \leqslant 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - 4x - 5 > 0, \\ -4x > 8; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 - 4x - 5 > 0, \\ x + 1 \leqslant 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 - 4x - 5 > 0, \\ 5 - x < 0; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2 - 4x - 5 > 0, \\ \frac{1}{3}x - 4 \leqslant 0; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2 - 4x - 5 > 0, \\ \frac{3}{7}x + 3 \leqslant 0. \end{cases}$

1.104. 1) $\begin{cases} -x^2 + 6x - 8 \geqslant 0, \\ \frac{1}{2}x - 3{,}5 > 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} -x^2 + 6x - 8 \geqslant 0, \\ 4x - 9 \leqslant 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} -x^2 + 6x - 8 \geqslant 0, \\ 0{,}2x + 5 \leqslant 3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} -x^2 + 6x - 8 \geqslant 0, \\ -2x - 6 \leqslant 3; \end{cases}$

5) $\begin{cases} -x^2 + 6x - 8 \geqslant 0, \\ 3x + 1 < 7; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} -x^2 + 6x - 8 \geqslant 0, \\ 4x + 6 > -2. \end{cases}$

1.105. 1) $\begin{cases} -3x^2+4x-1<0, \\ 2x+9>1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} -3x^2+4x-1<0, \\ 4x-1\leqslant 9; \end{cases}$

3) $\begin{cases} -3x^2+4x-1<0, \\ 3x-2\leqslant 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} -3x^2+4x-1<0, \\ -2x<-1; \end{cases}$

5) $\begin{cases} -3x^2+4x-1<0, \\ 5x+8\leqslant -2; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} -3x^2+4x-1<0, \\ \frac{1}{6}x+1>3. \end{cases}$

1.106. 1) $\begin{cases} x^2-8x+15>0, \\ x\geqslant 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2-8x+15>0, \\ x<0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2-8x+15\leqslant 0, \\ x>0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} -x^2+8x-15\leqslant 0, \\ x\leqslant 0; \end{cases}$

5) $\begin{cases} -x^2+8x-15>0, \\ 4x\geqslant 16; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} -x^2+8x-15<0, \\ -2x\geqslant 10. \end{cases}$

1.107. 1) $\begin{cases} x^2-4x+7>0, \\ 1-x>\frac{1}{2}x-4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2-4x+7>0, \\ 5x-2<1-x; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2-4x+7>0, \\ (x-1)(x-2)\leqslant x(x-1); \end{cases}$

4) $\begin{cases} -x^2+4x-7<0, \\ (x-1)^2\geqslant (x-1)(x+1); \end{cases}$

5) $\begin{cases} -x^2+4x-7<0, \\ x+\frac{x}{2}\leqslant 1; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} -x^2+4x-7<0, \\ \frac{x}{2}-\frac{x}{3}<2. \end{cases}$

1.108. 1) $\begin{cases} 2x^2-3x+5<0, \\ x+4>2x-1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x^2-3x+5<0, \\ 2x+5<5x+7; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x^2-3x+5\leqslant 0, \\ -3x+1>3x+2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} -2x^2+3x-5>0, \\ 0{,}3x+1>0{,}5x-2; \end{cases}$

5) $\begin{cases} -2x^2+3x-5\geqslant 0, \\ 2x-6<3x-1; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} -2x^2+3x-5\geqslant 0, \\ 5-\frac{x}{2}\geqslant 1. \end{cases}$

1.109. 1) $\begin{cases} \frac{7-2x}{5}<\frac{x}{2}+1, \\ -3x^2+8x+3>0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{3x+1}{4}\geqslant \frac{5}{3}x+\frac{1}{2}, \\ 6x^2+x-2\geqslant 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{x+4}{2}-\frac{4-3x}{4}<\frac{1}{6}, \\ 3x^2+7x-6\leqslant 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{7x-2}{3}-\frac{5x+1}{2}\leqslant -1, \\ 4x^2-7x-2>0. \end{cases}$

1.110. 1) Укажите все целые значения x, которые являются решениями системы неравенств

$$\begin{cases} x^2-9x+14<0, \\ x-4<0. \end{cases}$$

2) Укажите наибольшее целое отрицательное значение x, которое является решением системы неравенств

$$\begin{cases} x(x+5)>6, \\ 1-\frac{x}{3}>0{,}1-0{,}25x. \end{cases}$$

Решите систему неравенств (1.111—1.112).

1.111. 1) $\begin{cases} (x-1)^2\geqslant 4, \\ x^2-8x>0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (x-1)^2\leqslant 4, \\ x^2-8x<0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} (x-1)^2<4, \\ x^2-8x\geqslant 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} (x-1)^2>4, \\ x^2-8x<0. \end{cases}$

1.112. 1) $\begin{cases} 2+9x-5x^2\geqslant 0, \\ 3x^2-2x-1>0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2+9x-5x^2<0, \\ 3x^2-2x-1\leqslant 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2+9x-5x^2\leqslant 0, \\ 3x^2-2x-1>0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2+9x-5x^2<0, \\ 3x^2-2x-1\geqslant 0. \end{cases}$

1.113. 1) Укажите все целые значения x, которые являются решениями системы неравенств

$$\begin{cases} x^2+6x+5<0, \\ x^2+4x+3>0. \end{cases}$$

2) Укажите сумму целых значений x, которые являются решениями системы неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 5x - 6 < 0, \\ x^2 - 3x > 0. \end{cases}$$

Укажите естественную область определения выражения (1.114—1.115).

1.114. 1) $\sqrt{9 - x^2} + \sqrt{x - 2}$; 2) $\sqrt{x - 4} + \sqrt{25 - x^2}$;

3) $\dfrac{\sqrt{x^2 - 2}}{\sqrt{x^2 - 6x + 5}}$; 4) $\dfrac{\sqrt{2x^2 - 10}}{\sqrt{x^2 + x - 72}}$;

5) $\dfrac{\sqrt{3 - x^2}}{\sqrt{x^2 - 2x - 80}}$; 6) $\dfrac{\sqrt{5 - x^2}}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}}$.

1.115. 1) $\sqrt{24 - x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + x - 20}}$;

2) $\sqrt{x^2 - 2x - 7} \cdot \sqrt{4 - x}$;

3) $\sqrt{6 + x - x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}$;

4) $\sqrt{3x^2 + 10x + 3} \cdot \sqrt{x^2 - 7x + 10}$.

Решите систему неравенств (1.116—1.119).

1.116. 1) $\begin{cases} \sqrt{x - 2} \geqslant 0, \\ x - 5 \geqslant 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt{x - 1} \geqslant 0, \\ 2x - 8 < 12; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \sqrt{x - 3} \leqslant 0, \\ x^2 - 8x + 12 < 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \sqrt{x + 5} \leqslant 0, \\ x^2 + 3x - 18 \geqslant 0. \end{cases}$

1.117. 1) $\begin{cases} |x + 4| > 2, \\ x^2 + 8x + 7 < 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} |x - 3| < 8, \\ x^2 - 6x - 27 \geqslant 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} |x^2 - 16| \leqslant 0, \\ x^2 - 16x - 17 \geqslant 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} |x^2 - 9| \geqslant 0, \\ 2x - 5 > 0. \end{cases}$

1.118. 1) $\begin{cases} x^4 - 5x^2 - 36 \geqslant 0, \\ x^2 + x - 2 > 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^4 - 5x^2 - 36 \leqslant 0, \\ x^2 + x - 2 < 0. \end{cases}$

1.119. 1) $\begin{cases} x^2 > 0, \\ x^2 + 5x + 6 \geqslant 0, \\ x^4 - 5x^2 - 36 \leqslant 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 \leqslant 0, \\ x^2 + 5x + 6 > 0, \\ x^4 - 5x^2 - 36 > 0. \end{cases}$

1.120*. При каких значениях a система неравенств имеет хотя бы одно решение:

1) $\begin{cases} x \geqslant 2, \\ x < a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x \leqslant 4, \\ x \geqslant a? \end{cases}$

1.121*. При каких значениях b система неравенств не имеет решений:

1) $\begin{cases} x > 2, \\ x < b; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x \leqslant 8, \\ x \geqslant b? \end{cases}$

1.122*. При каких значениях c решением системы неравенств

$\begin{cases} x > 3, \\ x \geqslant c \end{cases}$ является промежуток:

1) $(3; +\infty)$; 2) $[4; +\infty)$?

1.123*. При каких значениях p существует ровно три целых числа, являющихся решениями системы неравенств:

1) $\begin{cases} x \geqslant 2, \\ x < p; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x < 5, \\ x \geqslant p? \end{cases}$

1.124. 1) Если к 0,5 суммы двух последовательных натуральных чисел прибавить $\frac{1}{3}$ первого числа, то получится число, меньшее 12, а если из $\frac{1}{3}$ суммы этих чисел вычесть 0,5 второго числа, то получится число, большее 1. Найдите эти числа.

2) Произведение четного натурального числа и его половины больше 17, но меньше 25. Найдите это число.

1.125. 1) Найдите натуральное число, если его квадрат больше 144, но меньше 170.

2) Знаменатель положительной несократимой дроби больше квадрата ее числителя на 1. Если к числителю

и знаменателю прибавить по 5, то значение дроби будет больше $\frac{1}{2}$, если от числителя и знаменателя отнять по 2, то значение дроби будет больше $\frac{1}{10}$. Найдите дробь.

▲ 1.8. Решение неравенств с параметром

С решением уравнений и систем уравнений с параметром мы познакомились в 9-м классе. На следующем примере покажем, как решаются неравенства с параметром.

Пример 1. Решить неравенство с неизвестным x:

$$(a^2 - 5a + 6)x > a - 3. \qquad (1)$$

Решение. Неравенство (1) является линейным. Его решения зависят от того, каким является коэффициент при x. Следует рассмотреть решение неравенства (1) в случаях, когда этот коэффициент: 1) равен нулю; 2) больше нуля; 3) меньше нуля.

Рассмотрим каждый из этих случаев в отдельности.

Случай 1). $a^2 - 5a + 6 = 0$ при $a = 2$ или $a = 3$.

Если $a = 2$, то неравенство (1) принимает вид

$$0 \cdot x > -1,$$

т. е. оно верно при любом значении $x \in R$.

Если $a = 3$, то неравенство (1) принимает вид

$$0 \cdot x > 0,$$

т. е. оно не имеет решений.

Случай 2). $a^2 - 5a + 6 > 0$ при $a \in (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$, и тогда неравенство (1) равносильно неравенству

$$x > \frac{a-3}{a^2-5a+6}, \text{ т. е. } x > \frac{1}{a-2}.$$

Случай 3). $a^2 - 5a + 6 < 0$ при $a \in (2; 3)$, и тогда неравенство (1) равносильно неравенству

$$x < \frac{a-3}{a^2-5a+6}, \text{ т. е. } x < \frac{1}{a-2}.$$

Ответ: если $a = 2$, то x — любое действительное число;
если $a = 3$, то решений нет;
если $a \in (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$, то x — любое число из промежутка $\left(\frac{1}{a-2}; +\infty\right)$;
если $a \in (2; 3)$, то x — любое число из промежутка $\left(-\infty; \frac{1}{a-2}\right)$.

! *Решить неравенство с параметром* — это значит указать значения параметра, при которых неравенство имеет решения, и для этих значений параметра найти множество его решений, а также указать, при каких значениях параметра решений нет.

Пример 2. Решить неравенство с параметром m:

а) $x^2 < m$;
б) $x^2 \leqslant m^2 - 1$;
в) $x^2 < m^2 - 2m + 1$.

Решение. а) Если $m \leqslant 0$, то данное неравенство решений не имеет (поясните почему).

Если $m > 0$, то неравенство $x^2 < m$ равносильно неравенству

$$|x| < \sqrt{m},$$

которое равносильно неравенству

$$-\sqrt{m} < x < \sqrt{m}.$$

Ответ: если $m \leqslant 0$, то решений нет;
если $m > 0$, то x — любое число из промежутка $(-\sqrt{m}; \sqrt{m})$.

б) Если $m^2 - 1 = 0$, т. е. $m = -1$ или $m = 1$, то данное неравенство равносильно неравенству

$$x^2 \leqslant 0,$$

решением которого является $x = 0$.

Если $m^2 - 1 < 0$, т. е. $m \in (-1; 1)$, то неравенство б) решений не имеет, поскольку значения выражения x^2 неотрицательны при всех значениях x.

Если $m^2 - 1 > 0$, т. е. $m \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, то неравенство б) равносильно неравенству

$$|x| \leqslant \sqrt{m^2-1},$$

решениями которого являются все значения x из промежутка $[-\sqrt{m^2-1};\ \sqrt{m^2-1}]$.

Ответ: если $m=\pm1$, то $x=0$;
если $m\in(-1;\ 1)$, то решений нет;
если $m\in(-\infty;\ -1)\cup(1;\ +\infty)$, то x — любое число из промежутка $[-\sqrt{m^2-1};\ \sqrt{m^2-1}]$.

в) Данное неравенство равносильно неравенству

$$x^2<(m-1)^2,$$

которое, в свою очередь, равносильно неравенству

$$|x|<|m-1|. \qquad (2)$$

Неравенство (2) не имеет решений только при $m=1$.

Если $m\neq1$, то неравенство (2) равносильно неравенству

$$-|m-1|<x<|m-1|.$$

Ответ: если $m=1$, то решений нет;
если $m\neq1$, то x — любое число из промежутка $(-|m-1|;\ |m-1|)$.

Пример 3*. При каких значениях a неравенство

$$x^2-(a+1)x+1<0: \qquad (3)$$

а) имеет решения;

б) имеет такие решения, что все они принадлежат промежутку $\left[-1;\ \frac{1}{2}\right]$?

Решение. а) Квадратное неравенство (3) имеет решения тогда, когда его дискриминант $D=(a+1)^2-4$ принимает положительные значения (объясните, почему при $D\leqslant0$ у неравенства (3) решений нет). Решим неравенство $D>0$:

$$(a+1-2)(a+1+2)>0,$$
$$(a-1)(a+3)>0,$$
$$a<-3 \text{ или } a>1.$$

Ответ: при $a\in(-\infty;\ -3)\cup(1;\ +\infty)$.

б) Рассмотрим функцию $y=f(x)$, где $f(x)=x^2-(a+1)x+1$.

Если $D>0$, то функция f имеет два нуля x_1 и x_2 (полагаем, что $x_1<x_2$). Поскольку ветви параболы $y=f(x)$ направлены вверх, то множеством решений неравенства $f(x)<0$, т. е. неравенства (3), является промежуток $(x_1;\ x_2)$. По условию, интервал $(x_1;\ x_2)$ должен входить в промежуток $\left[-1;\ \frac{1}{2}\right]$, т. е. должны быть верными неравенства (x_0 — абсцисса вершины параболы):

$$-1\leqslant x_1<x_0<x_2\leqslant\frac{1}{2} \text{ (рис. 57).}$$

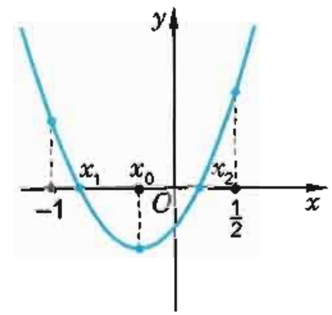


Рис. 57

Чтобы ответить на вопрос б) в примере 3, достаточно решить систему неравенств:

$$\begin{cases} x_1\geqslant-1, \\ x_2\leqslant\frac{1}{2}, \end{cases} \text{ т. е.}$$

$$\begin{cases} \dfrac{a+1-\sqrt{(a+1)^2-4}}{2}\geqslant-1, \\ \dfrac{a+1+\sqrt{(a+1)^2-4}}{2}\leqslant\dfrac{1}{2}. \end{cases} \qquad (4)$$

Решение системы (4) достаточно громоздкое, поскольку приходится решать иррациональные неравенства (решите ее самостоятельно).

Вместо системы (4) можно решать и другую систему неравенств:

$$\begin{cases} f(-1)\geqslant0, \\ f\left(\frac{1}{2}\right)\geqslant0, \\ -1<x_0<\frac{1}{2}, \\ D>0, \end{cases} \text{ т. е. } \begin{cases} 1-(a+1)(-1)+1\geqslant0, \\ \frac{1}{4}-(a+1)\frac{1}{2}+1\geqslant0, \\ -1<\frac{a+1}{2}<\frac{1}{2}, \\ (a+1)^2-4>0. \end{cases}$$

Эта система содержит большее число неравенств, чем система (4), но их проще решать. Получаем:

$$\begin{cases} a\geqslant-3, \\ a\leqslant1{,}5, \\ -3<a<0, \\ (a<-3 \text{ или } a>1). \end{cases}$$

Очевидно, что эта система решений не имеет (убедитесь в этом).

Ответ: таких значений a нет.

Пример 4*. При каких значениях a неравенство

$$x^2 - 2x + 3a \geqslant 0 \qquad (5)$$

имеет решения, принадлежащие промежутку $[-3;\ 4]$?

Решение. Рассмотрим функцию $y = f(x)$, где $f(x) = x^2 - 2x + 3a$.

Поскольку ветви параболы $y = f(x)$ направлены вверх, то при любых значениях дискриминанта $D = 4 - 12a$ неравенство (5) имеет решения.

Найдем те значения параметра a, при которых множество решений неравенства имеет пересечение с промежутком $[-3;\ 4]$.

При $D = 4 - 12a \leqslant 0$, т. е. при $a \geqslant \frac{1}{3}$, множеством решений неравенства (5) является множество всех действительных чисел R, в котором, конечно, содержатся и числа из промежутка $[-3;\ 4]$.

При $D > 0$, т. е. при $a < \frac{1}{3}$, квадратичная функция f имеет два нуля x_1 и x_2 (полагаем, что $x_1 < x_2$), а множеством решений неравенства $f(x) \geqslant 0$, т. е. неравенства (5), является множество чисел $(-\infty;\ x_1] \cup [x_2;\ +\infty)$.

Это множество не имеет общих точек с отрезком $[-3;\ 4]$ только тогда, когда

$$x_1 < -3 < 4 < x_2,$$

т. е. когда верны утверждения:

$$D > 0,\ f(-3) < 0,\ f(4) < 0$$

(поясните эти неравенства, самостоятельно выполнив рисунок).

Решив систему неравенств, получим

$$\begin{cases} a < \frac{1}{3}, \\ a < -5, \\ a < -2\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Откуда имеем $a < -5$.

Таким образом, при $a \in (-\infty;\ -5)$ никакие решения неравенства (5) не содержатся в отрезке $[-3;\ 4]$, а при любых других значениях a — содержатся. Значит, $a \in [-5;\ +\infty)$.

Ответ: при $a \in [-5;\ +\infty)$.

?

1. Что значит решить неравенство с параметром?
2. Приведите пример неравенства с параметром.

Упражнения

1.126. Решите неравенство с неизвестным x:

1) $(a^2 - 10a + 21)x > a - 7$;
2) $(a^2 + 8a + 15)x < a + 5$;
3) $(2a^2 + a - 10)x \leqslant a - 2$;
4) $(5a^2 - 9a - 2)x \geqslant 5a + 1$;
5) $(a - 7)x < 2a^2 - 15a + 7$;
6) $(6a - 1)x > 18a^2 - 9a + 1$;
7) $(7 + 6a - a^2)x \geqslant a + 1$;
8) $(40 - 6a - a^2)x \leqslant a + 10$.

Решите неравенство с параметром k (1.127—1.129).

1.127. 1) $x^2 > k$; 2) $x^2 \leqslant k$; 3) $x^2 \geqslant k$; 4) $x^2 < k$.

1.128. 1) $x^2 > k^2 - 4$; 2) $x^2 < k^2 - 9$; 3) $x^2 \leqslant k^2 - 16$; 4) $x^2 \geqslant k^2 - 25$.

1.129. 1) $x^2 < k^2 - 10k + 25$; 2) $x^2 \leqslant k^2 + 14k + 49$; 3) $x^2 \geqslant k^2 + 20k + 100$; 4) $x^2 > k^2 - 18k + 81$.

1.130. При каких значениях a для любого значения x выполняется неравенство:

1) $ax^2 + 2ax + 4 > 0$;
2) $ax^2 + 4x - 1 + 2a > 0$?

1.131*. Решите неравенство с неизвестным x:

1) $\frac{(x-1)(x-a)}{x+4} \leqslant 0$; 2) $\frac{(x+2)(x-3)}{x-a} \geqslant 0$.

1.132*. Найдите наибольшее значение p, при котором для любого значения x верно неравенство:

1) $3x^2 - 18x - 3 \geqslant p$;
2) $2x^2 + 20x - 4 \geqslant p$.

1.133*. При каких значениях m неравенство

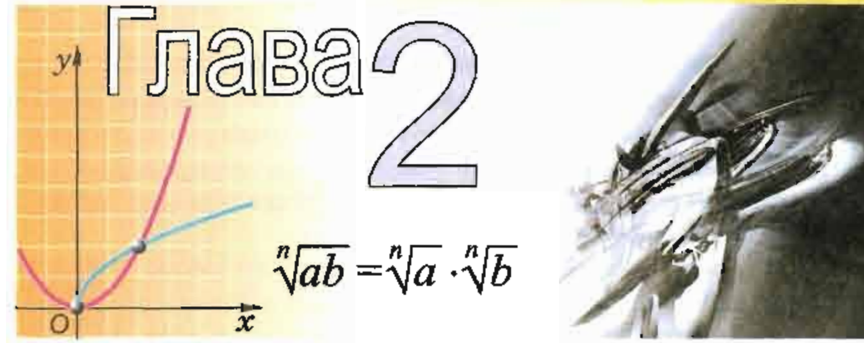
$$x^2 + (m - 2)x + 4 > 0:$$

1) имеет решения;
2) имеет такие решения, что все они принадлежат промежутку $[-2; 3]$?

1.134*. При каких значениях t неравенство

$$x^2 - (t + 4)x - 2 < 0:$$

1) имеет решения;
2) имеет такие решения, что все они принадлежат промежутку $\left[-\frac{1}{2}; 5\right]$?



Корень n-й степени

2.1. Степень с целым показателем

Напомним определение и основные свойства степени с целым показателем.

Для любого действительного числа a полагаем

$$a^n = \underbrace{aa...a}_{n} \ (n \geqslant 2, n \in N); \qquad a^1 = a.$$

Для любого действительного числа $a \neq 0$ полагаем

$$a^0 = 1; \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \ (n \geqslant 1, n \in N).$$

Свойства действий над степенями с целыми показателями сформулированы в следующей теореме (они частично были доказаны в 7-м классе).

Теорема 1. Для любых значений $a \neq 0$ и $b \neq 0$ при любых целых l и m верны равенства:

$$a^l \cdot a^m = a^{l+m}; \qquad (1)$$

$$\frac{a^l}{a^m} = a^{l-m}; \qquad (2)$$

$$(a^l)^m = a^{lm}; \qquad (3)$$

$$(ab)^n = a^n b^n; \qquad (4)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}. \qquad (5)$$

Сформулируем также теорему о возведении в степень обеих частей неравенства; она была частично рассмотрена в 8-м классе.

Теорема 2. Пусть a и b — неотрицательные числа, n — натуральное число. Тогда:

1) если $a < b$, то $a^n < b^n$;

2) если $a^n < b^n$, то $a < b$.

Доказательство. 1) Это свойство было доказано в учебном пособии 8-го класса (см. следствие из теоремы 2 в п. 2.5).

2) Проведем доказательство методом от противного. Допустим, что неравенство $a < b$ неверное. Тогда верно одно из двух соотношений: $a = b$ или $a > b$.

Если $a = b$, то $a^n = b^n$. Это противоречит условию.

Если $a > b$, то, согласно первой части этой теоремы, $a^n > b^n$. Опять получили противоречие с условием.

Значит, $a < b$. ⊠

Пример 1. Сравнить числа $\sqrt{79}$ и 9.

Решение. Поскольку $9 = \sqrt{81}$ и верно неравенство $79 < 81$, то по теореме 2 будет верным и неравенство $\sqrt{79} < \sqrt{81}$, т. е. $\sqrt{79} < 9$.

Ответ: $\sqrt{79} < 9$.

Пример 2. Известно, что $m^2 > k$. Верно ли неравенство

$$m^4 > k^2?$$

Решение. Если $k \geqslant 0$, то из верного неравенства $m^2 > k$ следует, что верно и неравенство $m^4 > k^2$.

Если $k < 0$, то гарантировать, что, когда верно неравенство $m^2 > k$, будет верным и неравенство $m^4 > k^2$ нельзя. Например, неравенство $2^2 > -5$ — верное, а неравенство $2^4 > (-5)^2$ — неверное.

Следствие. Пусть a и b — числа одного знака, n — натуральное число. Тогда, если $a^n = b^n$, то $a = b$.

Доказательство. Проведем его методом от противного. Допустим, что $a \neq b$, например $a < b$.

Если a и b — положительные числа, то, согласно теореме 2, верно неравенство $a^n < b^n$. Получили противоречие с условием. Значит, $a = b$. Если a и b — отрицательные числа, то $-a$ и $-b$ — положительные числа. Ясно, что если $(-a)^n = (-b)^n$, то, как только что было доказано, $-a = -b$, а значит, $a = b$. ⊠

Заметим, что при использовании этого следствия необходимо проверять совпадение знаков a и b при четном n, а при нечетном n такой необходимости нет.

Пример 3. Верно ли, что $a = b$, если:

а) $a^4 = b^4$; б) $a^5 = b^5$?

Решение. а) Верно, если a и b — числа одного знака, и неверно, если они разных знаков. Например, $2^4 = (-2)^4$ — верное числовое равенство, но равенство $2 = -2$ — неверное.

б) Поскольку число и его нечетная степень всегда имеют один и тот же знак, то из того, что $a^5 = b^5$ — верное числовое равенство, следует равенство чисел a и b.

Пример 4. Выполнить действия:

а) $2^{8m} \cdot 2^{m+1} : 2^{2m-9}$; б) $(2x^3 \cdot x^{-5}y)^4$.

Решение. а) $2^{8m} \cdot 2^{m+1} : 2^{2m-9} = 2^{8m+(m+1)-(2m-9)} = 2^{8m+m+1-2m+9} = 2^{7m+10}$.

б) $(2x^3 \cdot x^{-5}y)^4 = (2x^{3+(-5)}y)^4 = (2x^{-2}y)^4 = 16x^{-8}y^4$.

1. Как определяется n-я степень числа a, если:
   а) $n = 1$; б) $n \in N$, $n > 1$?
2. Как определяется степень:
   а) $a^{-n} (a \neq 0,\ n \in N)$;
   б) $a^0 (a \neq 0)$?
3. Сформулируйте теорему о свойствах действий над степенями с целыми показателями:
   а) об умножении степеней с одинаковыми основаниями;
   б) о делении степеней с одинаковыми основаниями;
   в) о возведении степени в степень;
   г) о возведении в степень произведения;
   д) о возведении в степень дроби.

Упражнения

2.1°. Вычислите:

1) $2^3+(-3)^3-(-2)^2+(-1)^7$;
2) $(-7)^2-3^4-(-4)^8-(-1)^2$;
3) $13\cdot2^3-9\cdot2^3+15\cdot2^3-(-2)^3-5(-2)^3+6(-2)^3$;
4) $8\cdot3^2-7\cdot3^2-10\cdot3^2-(-3)^2+6(-3)^4+5(-3)^3$.

2.2°. Сравните число с нулем:

1) 21^0; 2) $\left(-\frac{1}{5}\right)^0$; 3) $-(-16)^0$; 4) -10^0;
5) $(-8)^0$; 6) -13^0; 7) $\frac{1}{(-2)^0}$; 8) $\frac{1}{2^0}$.

Представьте в виде степени произведение (2.3—2.4).

2.3°. 1) $6\cdot6^2\cdot6^5$; 2) $0{,}4^3\cdot0{,}4^5\cdot0{,}4$;
3) $(-5)^4(-5)^{16}(-5)$; 4) $(-3)^8(-3)^6(-3)^2$;
5) $2^{3n}\cdot2^{6n}\cdot2^n\cdot16$; 6) $3^{8m}\cdot3^{5m}\cdot81$.

2.4°. 1) a^8a^4a; 2) a^4aa^5;
3) $(-m)^2(-m)^3(-m)^4$; 4) $(-m)^9(-m)^2(-m)^{11}$;
5) $(4y)^8(4y)^3(4y)^5$; 6) $(6t)^2(6t)^3(6t)^4(6t)^5$.

2.5°. Представьте степень в виде произведения двух степеней с одинаковыми основаниями:

1) 4^8; 2) 15^7; 3) a^5; 4) b^6;
5) 4^{3+b}; 6) 7^{b+1}; 7) 13^{3a}; 8) 10^{2a};
9) $(7p)^{19}$; 10) $(3p)^{13}$; 11) $(-p)^{20}$; 12) $(-t)^{11}$.

2.6. Представьте в виде степени частное:

1) $12^6:12^4$; 2) $3^8:3^5$;
3) $x^{40}:x^{21}$; 4) $x^{10}:x^2$;
5) $a^8:a$; 6) $a^5:a$;
7) $19^{4m}:19^{3m}$; 8) $17^{5n-1}:17^{3n}$;
9) $(-1{,}5)^{4t+2}:(-1{,}5)^{2t-1}$; 10) $(-0{,}8)^{3t-5}:(-0{,}8)^{2t+1}$.

2.7. Представьте степень в виде частного двух степеней с одинаковыми основаниями:

1) 4^6; 2) 3^4; 3) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{15}$; 4) $\left(1\frac{5}{7}\right)^2$;
5) a^t; 6) $(-x)^{14}$; 7) $\left(\frac{2}{7}b\right)^3$; 8) $(-0{,}1c)^9$.

2.8°. Возведите степень в степень:

1) $((-3)^7)^4$; 2) $(5^2)^3$;
3) $\left(\left(\frac{1}{4}\right)^2\right)^{-5}$; 4) $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-5}\right)^2$;
5) $((-8)^{-6})^{-7}$; 6) $((-5)^{-8})^{-2}$;
7) $((-2)^3)^b$; 8) $((-3)^4)^p$.

2.9. Определите, верно ли равенство (ответ обоснуйте):

1) $((-3)^4)^5=(-3^4)^5$; 2) $((-2)^8)^{11}=(-2^8)^{11}$.

Выполните действия (2.10—2.11).

2.10°. 1) $(3x)^4$; 2) $\left(\frac{1}{2}y\right)^5$; 3) $(-7b)^4$;
4) $(-8a)^3$; 5) $(4x^3y^4)^2$; 6) $(10x^2y^5)^3$.

2.11. 1) $\left(\frac{x}{y}\right)^4$; 2) $\left(-\frac{a}{b}\right)^8$; 3) $\left(\frac{x^2}{y^3}\right)^2$;
4) $\left(\frac{a^3}{b^4}\right)^2$; 5) $\left(\frac{a^2b^7}{5c^4}\right)^2$; 6) $\left(\frac{3a^8}{b^3c^6}\right)^5$.

2.12. Замените степень дробью:
1) 10^{-2}; 2) 6^{-5}; 3) $(-4)^{-6}$;
4) $(-8)^{-13}$; 5) x^{-20}; 6) y^{-12};
7) $(-2x)^{-9}$; 8) $(-4y)^{-16}$; 9) $(-5b)^{-8}$.

2.13. Вычислите:
1) 2^{-3}; 2) 12^{-2}; 3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$;
4) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$; 5) $(-4)^{-3}$; 6) $(-5)^{-2}$;
7) $-(-15)^{-1}$; 8) $-(-10)^{-2}$; 9) $(-6)^0$;
10) -6^0; 11) $((-14)^2)^0$; 12) $((-14)^0)^2$.

2.14. Замените дробь степенью с отрицательным показателем:

1) $\frac{1}{4^3}$; 2) $\frac{1}{21^{12}}$; 3) $\frac{1}{x^{10}}$; 4) $\frac{1}{(-a)^{27}}$;

5) $\frac{1}{13}$; 6) $\frac{1}{19}$; 7) $\frac{1}{1000}$; 8) $\frac{1}{64}$.

Упростите выражение (2.15—2.16).

2.15. 1) $\left(2\frac{2}{3}x^6y^{12} : (xy)^4\right) \cdot \left(-1\frac{1}{2}x^7y^{10} : x^6y^8\right)^4$;

2) $\left(3\frac{3}{7}(xy)^9 : x^4y^3\right) \cdot \left(-2\frac{1}{3}x^{12}y^4 : x^7y^3\right)^2$;

3) $\left(-\frac{2}{5}a^2xy \cdot (axy^2)^2\right) : \left(-\frac{1}{2}ax^5y^7 : (xy^2)^2\right)$;

4) $\left(-1\frac{1}{2}a^8b^5c^8 : (a^2bc^3)^2\right) : \left(-\frac{2}{3}(abc)^2 \cdot a(bc)^0\right)$.

2.16. 1) $(-5{,}1a^{k-2}b^{3-k}c^k) : (1{,}7a^2b^kc^{2-k})$;

2) $(8{,}4a^{k-3}b^{4-k}c^k) : (-2{,}1a^3b^{k-4}c^{3-k})$;

3) $\left(\frac{4a^{-3-2k}b^{3+2k}}{(a^{1+k}b^{1-k})^{-2}}\right)^{-2}$;

4) $\left(\frac{2x^{-2+4k}y^{2-4k}}{(x^{1-k}y^{k+1})^{-4}}\right)^{-3}$.

2.17. Упростите выражение:

1) $\left(\frac{a^{-2}}{a^{-2}-2}\right)^{-3} - \left(\frac{a^{-2}}{a^{-2}+2}\right)^{-2}$ и найдите его значение при $a = (-0{,}25)^{-2}$;

2) $\left(\frac{2a^{-2}}{5-a^{-2}}\right)^{-2} - \left(\frac{2a^{-2}}{a^{-2}+5}\right)^{-2}$ и найдите его значение при $a = (-0{,}5)^{-4}$.

2.18. Упростите выражение:

1) $\frac{a^{-2}-2b^{-2}}{3a^{-2}-2b^{-2}}$ и найдите его значение, если $\left(\frac{a^{-1}}{b^{-1}}\right)^{-1} = 15^{-1}$;

2) $\frac{a^{-2}+3b^{-2}}{2a^{-2}+3b^{-2}}$ и найдите его значение, если $\left(\frac{a^{-1}}{b^{-1}}\right)^{-1} = 8^{-1}$.

2.19. Сравните числа:

1) $\sqrt{103}$ и 10; 2) $\sqrt{200}$ и 15;

3) -17 и $-\sqrt{290}$; 4) -28 и $-\sqrt{780}$;

5) $5\sqrt{3}$ и $\sqrt{74}$; 6) $4\sqrt{7}$ и $\sqrt{97}$;

7) $\frac{1}{4}\sqrt{80}$ и $\frac{2}{3}\sqrt{45}$; 8) $\frac{1}{6}\sqrt{72}$ и $\frac{2}{5}\sqrt{50}$.

2.20. Известно, что $a^3 < b^2$. Верно ли неравенство:

1) $a^9 < b^6$; 2) $a^{21} < b^{14}$;

3) $a^{-3} > b^{-2}$; 4) $a^{-15} > b^{-10}$;

5) $\frac{a^2 \cdot (a^3)^2}{a^{-3} \cdot (a^{-2})^2} < \frac{(b^4)^2 \cdot (b^3)^2}{(b^2)^3 \cdot b^{-2}}$;

6) $\frac{(a^5)^3 \cdot (a^7)^2}{(a^6)^2 : a^4} < \frac{(b^3)^3 \cdot (b^2)^5}{(b^5)^4 \cdot (b^6)^{-2} \cdot b^{-3}}$?

2.21. Известно, что $a^4 > b$. Верно ли неравенство:

1) $(a^2)^3 \cdot a^2 > (b^3)^2 : (b^2)^2$;

2) $(a^2 \cdot a^3)^2 \cdot (a \cdot a^2)^2 > (b \cdot b^5)^3 : (b^3 \cdot b^4)^2$;

3) $\frac{1}{a^8} < \frac{1}{b^2}$;

4) $a : (a^3)^7 < ((b^2)^5 : b^5)^{-1}$?

2.22. Верно ли, что $m = n$, если:

1) $m^7 = n^7$; 2) $m^{26} = n^{26}$;

3) $\frac{m^{-3}(-m)^2m^{-1}}{m^{-5}} = \frac{n^{10}n^{-2}n^{-3}}{(-n)^2}$; 4) $\frac{(-m)^{-3} \cdot m^{-4}}{(-m)^{-6}} = \frac{(-n^2)^3 \cdot n^5}{(-n^3)^4}$;

5) $m^{-2} \cdot \frac{1-m}{1-m^{-1}} = n^{-3} \cdot \frac{2-n}{1-2n^{-1}}$;

6) $m^5 \cdot \frac{4+m}{1+4m^{-1}} = n^7 \cdot \frac{8n^{-2}+1}{8+n^2}$?

2.23. Найдите значение выражения:

1) $\frac{(ab^{-3}-a^{-3}b)^{-1} \cdot (a^{-2}+b^{-2})}{(b^{-2}-a^{-2})^{-1}}$ при $a = 2$, $b = 10$;

2) $\frac{a^{-2}-a^{-1}b^{-1}+b^{-2}}{a^{-3}+b^{-3}} \cdot \left(\frac{ab}{a+b}\right)^{-2}$ при $a = 6$, $b = 2$.

2.2. Корень n-й степени

В 8-м классе мы познакомились с понятием квадратного корня из действительного числа (его называют также корнем 2-й степени). Напомним его определение.

Определение. ***Квадратным корнем из числа a*** называется число t, квадрат которого равен a.

Определим понятие корня для произвольной натуральной степени $n \geqslant 2$.

Определение. ***Корнем n-й степени из числа a*** называется такое число t, n-я степень которого равна a.

Таким образом, утверждение «t — корень n-й степени из a» означает, что $t^n = a$.

Корень 3-й степени называется также ***кубическим***.

Например, кубический корень из числа 125 — это число 5, так как $5^3 = 125$. Кубический корень из числа -125 — это число -5, так как $(-5)^3 = -125$.

Корень 7-й степени из числа 128 — это число 2, так как $2^7 = 128$. Корень 7-й степени из числа -128 — это число -2, так как $(-2)^7 = -128$. Корень 7-й степени из числа 0 — это 0, так как $0^7 = 0$.

! *Во множестве действительных чисел существует единственный корень нечетной степени n из любого числа a. Этот корень обозначается*

$$\sqrt[n]{a}.$$

Например,

$$\sqrt[3]{125} = 5,\ \sqrt[7]{-128} = -2,\ \sqrt[7]{0} = 0.$$

! Утверждение о существовании корня нечетной степени из любого числа мы принимаем без доказательства. Согласно определению, *когда n нечетное, то при любом значении a верно равенство*

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.$$

Например,

$$\left(\sqrt[7]{92}\right)^7 = 92,\ \left(\sqrt[7]{123}\right)^7 = 123,\ \left(\sqrt[7]{-123}\right)^7 = -123.$$

Заметим, что 0 — это единственное число, n-я степень которого равна 0. Поэтому

! при любом натуральном $n \geqslant 2$ существует единственный корень n-й степени из 0 — это число 0:

$$\sqrt[n]{0} = 0.$$

Примерами корней четной степени могут служить квадратные корни, которые изучались в 8-м классе. Рассмотрим еще несколько примеров.

Корни 4-й степени из числа 81 — это числа 3 и -3, так как $3^4 = 81$ и $(-3)^4 = 81$. Корни 6-й степени из числа 64 — это числа 2 и -2, так как $2^6 = 64$ и $(-2)^6 = 64$.

! *Во множестве действительных чисел существует ровно два корня четной степени n из любого положительного числа a, их модули равны, а знаки противоположны.*

Положительный корень обозначается

$$\sqrt[n]{a}.$$

Например, $\sqrt[4]{81} = 3$; $\sqrt[6]{64} = 2$.

! Утверждение о существовании корня четной степени из любого положительного числа мы примем без доказательства.

Согласно определению, *когда n четное, то при любом положительном значении a верно равенство*

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.$$

Например, $\left(\sqrt[4]{51}\right)^4 = 51$, $\left(\sqrt[4]{87}\right)^4 = 87$.

Не существует такого числа, 4-я степень которого равна -81. Поэтому корень 4-й степени из числа -81 не существует. И вообще, поскольку не существует такого числа, четная степень которого была бы отрицательной, то

! *не существует корня четной степени из отрицательного числа.*

Определение. Неотрицательный корень n-й степени из числа a называется *арифметическим корнем n-й степени из a*.

При четном n символом $\sqrt[n]{a}$ обозначается только арифметический корень n-й степени из числа a (при чтении записи $\sqrt[n]{a}$ слово «арифметический» обычно опускают).

Выражение, стоящее под знаком корня, называется *подкоренным выражением*.

Извлечь корень n-й степени из числа a — это значит найти значение выражения $\sqrt[n]{a}$.

Так как корень четной степени из отрицательного числа не существует, то выражение $\sqrt[n]{a}$ при четном n и отрицательном a не имеет смысла.

Например, не имеют смысла выражения $\sqrt[4]{-81}$ и $\sqrt[6]{-64}$.

Как мы установили, *при любом значении a, при котором выражение $\sqrt[n]{a}$ имеет смысл, верно равенство*

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a. \qquad (1)$$

Поэтому равенство (1) *является тождеством.*

В конце XV в. бакалавр Парижского университета Н. Шюке внес усовершенствования в алгебраическую символику. В частности, знаком корня служил символ R_x (от латинского слова *radix* — корень). Так выражение $\sqrt[4]{24+\sqrt{37}}$ в символике Шюке имело бы вид $\bar{R}_x^4 24\bar{p}\bar{R}_x^2 37$.

Знак корня $\sqrt{\ }$ в современном виде был предложен в 1525 г. чешским математиком К. Рудольфом в изданном им в Страсбурге учебнике алгебры. Этот учебник переиздавался до 1615 г. и по нему учился знаменитый математик Л. Эйлер.

Знак $\sqrt{\ }$ еще называют радикалом.

Пример 1. Верно ли, что:

а) $\sqrt[4]{(-2)^4} = -2$; б) $\sqrt[7]{(-2)^7} = -2$?

Решение. а) По определению арифметический корень n-й степени из неотрицательного числа a (n — четное число) является неотрицательным числом, n-я степень которого равна подкоренному выражению a.

Поскольку $-2 < 0$, то равенство $\sqrt[4]{(-2)^4} = -2$ неверное. Верно равенство $\sqrt[4]{(-2)^4} = 2$.

б) По определению корень n-й степени из числа a (n — нечетное число) является числом, n-я степень которого равна подкоренному выражению a.

Поскольку $(-2)^7 = -2^7$ — верное равенство, то равенство $\sqrt[7]{(-2)^7} = -2$ верное.

Пример 2. Решить уравнение:

а) $x^3 = 7$; б) $x^4 = 5$.

Решение. а) Решением этого уравнения является такое значение x, третья степень которого равна 7, т. е. по определению кубического корня имеем:

$$x = \sqrt[3]{7}.$$

Ответ: $\sqrt[3]{7}$.

б) Решением этого уравнения является такое значение x, 4-я степень которого равна 5, т. е. (по определению) x — это корень 4-й степени из числа 5. Но из положительного числа 5 существует два корня четвертой степени, которые равны по модулю и имеют противоположные знаки. Поскольку положительный корень обозначают $\sqrt[4]{5}$, то второй корень равен $-\sqrt[4]{5}$, т. е. $x = \pm\sqrt[4]{5}$.

Ответ: $\pm\sqrt[4]{5}$.

В тетради решение уравнения б) (аналогично и а)) можно записать так:

Решение: $x^4 = 5$; $x = \pm\sqrt[4]{5}$.

Ответ: $\pm\sqrt[4]{5}$.

Пример 3. Решить уравнение:

$$\text{а) } \left(\sqrt[8]{x}\right)^8 = x; \qquad \text{б) } \left(\sqrt[13]{x}\right)^{13} = x.$$

Решение. а) Поскольку данное равенство является тождеством при $x \geqslant 0$, то каждое неотрицательное значение x является решением (корнем) уравнения $\left(\sqrt[8]{x}\right)^8 = x$.

Ответ: $[0; +\infty)$.

б) Поскольку данное равенство является тождеством при любом значении x, то решением уравнения $\left(\sqrt[13]{x}\right)^{13} = x$ является любое действительное число, а $\boldsymbol{R}$ — множеством всех его корней.

Ответ: $\boldsymbol{R}$.

Пример 4. Решить уравнение

$$x^{12} - 63x^6 - 64 = 0.$$

Решение. Обозначим $x^6 = t$, тогда получим уравнение

$$t^2 - 63t - 64 = 0.$$

Корни этого уравнения

$$t_1 = 64,\ t_2 = -1.$$

Таким образом, имеем

$$x^6 = 64 \text{ или } x^6 = -1,$$

откуда $x = \pm 2$ (поясните, почему уравнение $x^6 = -1$ не имеет корней).

Ответ: ± 2.

?

1. Какое число называется корнем n-й степени из числа a?
2. Сколько корней четной степени n существует из положительного числа a?
3. Корень какой степени существует из любого числа a? Сколько таких корней?
4. Какой корень n-й степени из числа a называется арифметическим?
5. При каких значениях a верно равенство $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$, если: а) n — нечетное число; б) n — четное число?

Упражнения

2.24°. Используя определение арифметического корня n-й степени, докажите, что:

1) $\sqrt[4]{256} = 4$; 2) $\sqrt[10]{1024} = 2$;
3) $\sqrt[6]{729} = 3$; 4) $\sqrt[8]{6561} = 3$;
5) $\sqrt[12]{4096} = 2$; 6) $\sqrt[4]{14\,641} = 11$.

2.25°. Верно ли, что:

1) число -4 является корнем четвертой степени из числа 256;
2) число $-0{,}3$ является корнем четвертой степени из числа $-0{,}0081$?

2.26°. Верно ли, что:

1) $\sqrt[3]{-1728} = -12$; 2) $\sqrt[3]{-3375} = 15$;
3) $\sqrt[5]{-16\,807} = 7$; 4) $\sqrt[5]{-7776} = -6$?

2.27°. Найдите арифметический квадратный корень из числа:

1) 16; 2) 49; 3) 0; 4) 1;
5) 0,81; 6) 0,25; 7) 2,25; 8) 1,21;
9) $\frac{36}{169}$; 10) $\frac{144}{289}$; 11) $\frac{169}{100}$; 12) $\frac{81}{256}$.

2.28°. Найдите кубический корень из числа:

1) 1; 2) 0; 3) 343; 4) 8;
5) $\frac{1}{27}$; 6) 0,027; 7) 0,001; 8) $\frac{64}{125}$.

2.29°. Найдите арифметический корень четвертой степени из числа:

1) 0; 2) 1; 3) 16; 4) 0,0016;
5) $\frac{16}{81}$; 6) $\frac{256}{625}$; 7) 0,0001; 8) 0,1296.

Вычислите (2.30—2.42).

2.30°. 1) $\sqrt{9}$, $\sqrt{16}$, $\sqrt{25}$, $\sqrt{49}$, $\sqrt{81}$, $\sqrt{100}$;
2) $\sqrt{0{,}16}$, $\sqrt{0{,}09}$, $\sqrt{0{,}01}$, $\sqrt{0{,}04}$, $\sqrt{0{,}0025}$, $\sqrt{0{,}0001}$;

3) $\sqrt[3]{27}$, $\sqrt[3]{64}$, $\sqrt[3]{-125}$, $\sqrt[3]{0{,}008}$, $\sqrt[3]{0{,}000216}$, $\sqrt[3]{-1\,000\,000}$;

4) $\sqrt[4]{16}$, $\sqrt[4]{625}$, $\sqrt[4]{10\,000}$, $\sqrt[4]{0{,}0081}$, $\sqrt[4]{0{,}00000016}$, $\sqrt[4]{2401}$;

5) $\sqrt[5]{32}$, $\sqrt[5]{1024}$, $\sqrt[5]{243}$, $\sqrt[5]{0{,}03125}$, $\sqrt[5]{100\,000}$, $\sqrt[5]{0{,}00001}$;

6) $\sqrt[6]{64}$, $\sqrt[6]{729}$, $\sqrt[6]{15\,625}$, $\sqrt[6]{4096}$, $\sqrt[6]{0{,}046656}$, $\sqrt[6]{1\,000\,000}$.

2.31°. 1) $\sqrt[3]{-1000}$; 2) $\sqrt[15]{-1}$; 3) $\sqrt[3]{-64}$;

4) $\sqrt[5]{-1024}$; 5) $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}$; 6) $\sqrt[3]{-343}$;

7) $\sqrt[3]{-\frac{27}{216}}$; 8) $\sqrt[5]{-3125}$; 9) $\sqrt[5]{-0{,}00032}$.

2.32. 1) $\left(\sqrt[3]{-3}\right)^3$; 2) $\left(\sqrt[5]{14}\right)^5$; 3) $\left(\sqrt[7]{-30}\right)^7$;

4) $\left(\sqrt[11]{-15}\right)^{11}$; 5) $\left(-\sqrt[9]{6}\right)^9$; 6) $\left(-\sqrt[15]{99}\right)^{15}$.

2.33. 1) $\left(\sqrt[3]{-2\frac{2}{11}}\right)^3\cdot\left(-\sqrt[5]{6\frac{1}{9}}\right)^5\cdot\left(-\sqrt[13]{\frac{9}{5}}\right)^{13}\cdot\left(\sqrt[17]{-1\frac{13}{40}}\right)^{17}$;

2) $\left(-\sqrt[9]{3\frac{4}{15}}\right)^9\cdot\left(\sqrt[7]{-1\frac{5}{8}}\right)^7\cdot\left(\sqrt[5]{-1\frac{1}{14}}\right)^5\cdot\left(-\sqrt[3]{1\frac{25}{39}}\right)^3$.

2.34. 1) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^6$; 2) $\left(\sqrt[4]{0{,}1}\right)^{12}$; 3) $\left(\sqrt[5]{1\frac{1}{2}}\right)^{10}$;

4) $\left(\sqrt[6]{2\frac{1}{3}}\right)^{18}$; 5) $\left(\sqrt[7]{\frac{5}{6}}\right)^{21}$; 6) $\left(\sqrt[9]{\frac{2}{3}}\right)^{36}$.

2.35. 1) $\left(\sqrt[5]{\sqrt{3}}\right)^{10}$; 2) $\left(\sqrt[4]{\sqrt[3]{5}}\right)^{48}$; 3) $\left(\sqrt[10]{\sqrt[6]{7}}\right)^{120}$;

4) $\left(\sqrt[3]{\sqrt[4]{6}}\right)^{12}$; 5) $\left(\sqrt[8]{\sqrt{10}}\right)^{16}$; 6) $\left(\sqrt[4]{\sqrt[9]{12}}\right)^{36}$.

2.36°. 1) $\left(\sqrt{10}\right)^2$; 2) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^3$; 3) $\left(-\sqrt[4]{12}\right)^4$;

4) $-\sqrt[4]{12^4}$; 5) $\left(-\sqrt[5]{3}\right)^5$; 6) $\left(3\sqrt[3]{2}\right)^3$;

7) $\left(-4\sqrt[4]{4}\right)^4$; 8) $\left(-\sqrt[7]{15}\right)^7$; 9) $-5\sqrt[5]{5^5}$;

10) $\left(-\sqrt[6]{3}\right)^6$; 11) $\left(-2\sqrt[9]{2}\right)^9$; 12) $-\sqrt[8]{4^8}$.

2.37. 1) $\sqrt[5]{32}+\sqrt[3]{-8}$; 2) $\sqrt[4]{625}-\sqrt[3]{-125}$;

3) $12-6\sqrt[3]{0{,}125}$; 4) $1+10\sqrt[4]{0{,}0081}$;

5) $3\sqrt[4]{16}-4\sqrt[3]{27}$; 6) $\sqrt[3]{-3\frac{3}{8}}+\sqrt{2{,}25}$;

7) $\sqrt[3]{8}-\sqrt[3]{64}$; 8) $\sqrt[4]{16}-\sqrt[3]{64}$.

2.38. 1) $\sqrt{9}+\sqrt{4}$; 2) $\sqrt{36}-\sqrt[4]{16}$;

3) $\sqrt{0{,}81}+\sqrt[3]{0{,}001}$; 4) $\sqrt[3]{0{,}027}-\sqrt{0{,}04}$;

5) $5-\sqrt[4]{256}$; 6) $7+\sqrt[3]{8}$;

7) $\sqrt[5]{-32}+\sqrt[4]{16}$; 8) $\sqrt[3]{-27}+\sqrt[4]{81}$.

2.39. 1) $(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})$; 2) $(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)$;

3) $(2\sqrt{3}+4)(2\sqrt{3}-4)$; 4) $(3\sqrt{5}-2)(3\sqrt{5}+2)$;

5) $(\sqrt{10}-\sqrt{6})(\sqrt{6}+\sqrt{10})$; 6) $(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{3}-\sqrt{7})$.

2.40. 1) $\sqrt[3]{\frac{12}{25}\sqrt{\frac{244\cdot 15^{-1}}{38^2-23^2}}}$; 2) $\sqrt{58+\sqrt{\frac{44^2-26^2}{35}}}$;

3) $\sqrt{90+\sqrt{\frac{31(57^2-26^2)}{83}}}$; 4) $\sqrt[3]{\frac{23}{64}+\sqrt{\left(\frac{48^2-32^2}{5}\right)^{-1}}}$.

2.41. 1) $\left(\left(\sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^3}\right)^{-3}-\left(\sqrt[5]{\left(\frac{4}{3}\right)^{-5}}\right)^6\right)^{-1}\cdot\left(\sqrt[7]{-27}\right)^7$;

2) $\left(\left(\sqrt[5]{\frac{1}{7}}\right)^{-10}+\left(-\sqrt[9]{40}\right)^9\cdot\left(\sqrt[7]{\frac{5}{3}}\right)^0\right)^{-1}:\left(\sqrt[5]{9}\right)^{-10}$;

3) $\left(\left(\sqrt{\sqrt[3]{\left(\frac{3}{4}\right)^2}}\right)^6+\left(\sqrt[7]{-4^2}\right)^7\right):\left(\left(\sqrt{\sqrt[5]{\left(\frac{5}{6}\right)^0}}\right)^{10}-\right.$

$\left.-\left(-\sqrt[9]{\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}}\right)^9\right)$;

4) $\left(\left(\left(\sqrt[3]{-\frac{4}{5}}\right)^3\right)^0-\left(-\sqrt[11]{\sqrt{0{,}1}}\right)^{-22}\right):\left(\sqrt[5]{\left(\frac{3}{8}\right)^{-1}}\right)^5\times$

$\times\left(\sqrt[7]{\left(\frac{3}{2}\right)^3}\right)^7+\left(\sqrt[9]{-\frac{1}{3}}\right)^{-9}$.

2.42. 1) $\dfrac{(\sqrt[7]{a^7})^7}{(\sqrt[5]{a^5})^5}$; 2) $\dfrac{(\sqrt[3]{a^3})^3}{(\sqrt[9]{a^9})^9}$;

3) $\left(2\frac{1}{3}(\sqrt[3]{a^3})^3\cdot(\sqrt[7]{b^7})^7\right)^2\cdot\left(-1\frac{2}{7}(\sqrt[5]{a^5})^5\cdot(\sqrt[11]{b^{11}})^{11}\right)$;

4) $3\frac{3}{7}(\sqrt[5]{a^5})^5\cdot(\sqrt[9]{b^9})^9\cdot\left(-2\frac{1}{3}(\sqrt[7]{a^7})^7\cdot(\sqrt[13]{b^{13}})^{13}\right)^2$.

Найдите естественную область определения выражения (2.43—2.44).

2.43. 1) $\sqrt{x+4}$; 2) $\sqrt[4]{-9+2x}$;
3) $\sqrt[10]{5x^2-6x}$; 4) $\sqrt[12]{8x-4x^2}$;
5) $\sqrt[3]{x+3}$; 6) $\sqrt[5]{x-7}$;
7) $\sqrt[7]{x^2-4}$; 8) $\sqrt[9]{2x^2-32}$.

2.44. 1) $\sqrt[12]{\dfrac{3}{4x-1}}$; 2) $\sqrt[14]{\dfrac{-4}{8x-3}}$;
3) $\sqrt[8]{\dfrac{2-\sqrt{5}}{9-5x}}$; 4) $\sqrt[6]{\dfrac{3-\sqrt{10}}{16-7x}}$;
5) $\dfrac{2+x}{\sqrt[3]{4-2(8-6x)}}$; 6) $\dfrac{12-6x}{\sqrt[5]{2-7x+(3x-1)\cdot 2}}$;
7) $\sqrt[4]{\dfrac{-x^2}{2(x-2)-5(1-3x)-2}}$; 8) $\sqrt[28]{\dfrac{3(x+4)-6(2-x)+9}{x^4}}$.

2.45. Найдите ребро куба, если его объем равен:

1) 27 см^3; 2) 64 мм^3;
3) 0,125 дм^3; 4) 0,216 м^3.

Решите уравнение (2.46—2.54).

2.46°. 1) $x^2=0{,}49$; 2) $x^2=121$;
3) $x^3=0{,}008$; 4) $x^3=1000$;
5) $x^3=-64\,000$; 6) $x^4=256$;
7) $x^4=0{,}0625$; 8) $x^4=-16$.

2.47. 1) $x^3=-27$; 2) $x^5=-\frac{1}{32}$; 3) $x^7=-1$;
4) $x^9=-512$; 5) $x^3=-0{,}027$; 6) $x^{11}=0$.

2.48. 1) $x^2=11$; 2) $x^4=19$; 3) $x^8=27$;
4) $x^3=25$; 5) $x^7=38$; 6) $x^9=-2$;
7) $x^{15}=-6$; 8) $x^{17}=4$; 9) $x^{13}=-13$.

2.49. 1) $x^2=25\,600$; 2) $x^2=0{,}0196$;
3) $x^2+1=1{,}0016$; 4) $5x^2-20=0$;
5) $x^2+25=0$; 6) $x^2+1\frac{7}{9}=0$;
7) $x^2\cdot 4=0$; 8) $-6x^2=0$;
9) $1\frac{1}{3}x^2-12=0$; 10) $\frac{1}{3}x^2-1=0$.

2.50. 1) $4x^3+\frac{4}{125}=0$; 2) $8x^3+27=0$;
3) $-0{,}1x^4=-0{,}00001$; 4) $16x^4-81=0$;
5) $\frac{1}{2}x^5+16=0$; 6) $\frac{1}{32}x^6-2=0$.

2.51. 1) $x^4=7$; 2) $x^5=30$; 3) $x^6=19$; 4) $x^3=5$.

2.52. 1) $(x+1)^4=16$; 2) $(x-2)^6=64$;
3) $(2x+1)^3=27$; 4) $(3x-1)^5=32$.

2.53. 1) $x^{10}-31x^5-32=0$; 2) $x^8-15x^4-16=0$;
3) $x^4-10x^2+27=0$; 4) $x^6-7x^3-8=0$;
5) $x^8-82x^4+81=0$; 6) $x^4+2x^2-15=0$.

2.54. 1) $(\sqrt[6]{x})^6=x$; 2) $(\sqrt[10]{x})^{10}=x$;
3) $(\sqrt[3]{x})^3=x$; 4) $(\sqrt[5]{x})^5=x$;
5) $(\sqrt[4]{x-1})^4=x-1$; 6) $(\sqrt[12]{x+2})^{12}=x+2$;
7) $\left(\sqrt[7]{\frac{1}{x}}\right)^7=\frac{1}{x}$; 8) $\left(\sqrt[11]{\frac{1}{x-2}}\right)^{11}=\frac{1}{x-2}$.

2.3. Тождества с корнями, содержащие одну переменную

Корни n-й степени определяются только для натурального числа $n \geqslant 2$. Поэтому в формулировках теорем о свойствах корня n-й степени это условие обычно опускается.

Теорема 1. Пусть n — нечетное число. Тогда при любом значении a верны равенства:

$$\sqrt[n]{a^n} = a, \qquad (1)$$

$$\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}. \qquad (2)$$

▲ **Доказательство.** Равенства (1) и (2), как и другие равенства в теоремах этого пункта, очевидно, верны при $a = 0$. Поэтому доказательства проводятся для $a \neq 0$.

Рассмотрим равенство (1). Возведя его левую и правую части в n-ю степень, получим

$$\left(\sqrt[n]{a^n}\right)^n = a^n.$$

Согласно тождеству (1) из п. 2.2 — это верное числовое равенство при любом значении $a \neq 0$. По следствию из п. 2.1 верно и равенство

$$\sqrt[n]{a^n} = a. \ \boxtimes$$

Равенство (2) доказывается аналогичными рассуждениями: устанавливается, что n-е степени его левой и правой частей равны и на основании следствия из п. 2.1 делается вывод об истинности равенства (2) при любом значении a. (Докажите равенство (2) самостоятельно.) ▲

Заметим, что каждое из равенств, доказанных в этой теореме (как и остальные равенства, которые будут доказаны в теоремах этого пункта), является тождеством, поскольку оно превращается в верное числовое равенство при любом значении переменной, при котором входящие в это равенство выражения имеют смысл.

Теорема 2. Пусть n — четное число. Тогда при любом значении a верно равенство

$$\sqrt[n]{a^n} = |a|. \qquad (3)$$

▲ **Доказательство.** Возведя левую и правую части равенства (3) в n-ю степень и воспользовавшись тождеством (1) из п. 2.2, получим

$$a^n = |a|^n.$$

Это верное числовое равенство при любом значении a, поскольку число n — четное. Значит (по следствию из п. 2.1), верно и равенство

$$\sqrt[n]{a^n} = |a|. \ \boxtimes \ ▲$$

Теорема 3. Пусть n и k — натуральные числа. Тогда при любом неотрицательном значении a верны равенства:

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}, \qquad (4)$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}. \qquad (5)$$

▲ **Доказательство.** Рассмотрим равенство (4). Числа $\sqrt[n]{a}$ и $\sqrt[nk]{a^k}$ — неотрицательные. Возведя левую часть равенства (4) в степень nk, на основании свойств степеней и тождества (1) из п. 2.2, получим

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^{nk} = \left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right)^k = a^k.$$

Для правой части равенства (4) соответственно имеем

$$\left(\sqrt[nk]{a^k}\right)^{nk} = a^k.$$

Значит, $\left(\sqrt[n]{a}\right)^{nk} = \left(\sqrt[nk]{a^k}\right)^{nk}$ и по следствию из п. 2.1 имеем

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}. \ \boxtimes$$

Равенство (5) доказывается аналогично (докажите его самостоятельно). ▲

Заметим, что, когда оба числа n и k — нечетные, равенства (4) и (5) верны для любых значений a, а не только для неотрицательных. Доказывается это утверждение рассуждениями, аналогичными приведенным.

! Равенство (5) означает, что *при извлечении корня из корня подкоренное выражение остается прежним, а показатели корней перемножаются.*

Теорема 4. Пусть k — целое число. Тогда при любом положительном значении a верно равенство

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}. \qquad (6)$$

▲ Доказательство проведите самостоятельно. ▲

Пример 1. Найти значение $\sqrt[4]{b^{12}}$ при:
а) $b=-1$; б) $b=2$.

Решение. а) $\sqrt[4]{b^{12}}=|b^3|=|(-1)^3|=|-1|=1$;

б) $\sqrt[4]{b^{12}}=|b^3|=|2^3|=8$.

Ответ: а) 1; б) 8.

Пример 2. Сравнить числа $\sqrt[6]{2\sqrt{3}}$ и $\sqrt[4]{2}$.

Решение.

$$\sqrt[6]{2\sqrt{3}}=\sqrt[6]{\sqrt{3\cdot 4}}=\sqrt[12]{12};\ \sqrt[4]{2}=\sqrt[4\cdot 3]{2^3}=\sqrt[12]{8}.$$

Поскольку неравенство $12>8$ верно, то будет верным и неравенство $\sqrt[12]{12}>\sqrt[12]{8}$, следовательно,

$$\sqrt[6]{2\sqrt{3}}>\sqrt[4]{2}.$$

Ответ: $\sqrt[6]{2\sqrt{3}}>\sqrt[4]{2}$.

Пример 3. Решить уравнение:

а) $\sqrt[3]{x}=-2$; б) $\sqrt[5]{x+7}=3$.

Решение. а) По определению корня n-й степени имеем, что данное уравнение равносильно уравнению $x=(-2)^3$, т. е. $x=-8$.

б) $x+7=3^5$, откуда $x=243-7$, т. е. $x=236$.

Ответ: а) -8; б) 236.

Пример 4. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{x}-9\sqrt[6]{x}+14=0.$$

Решение. Обозначим $\sqrt[6]{x}=t$, тогда $\sqrt[3]{x}=\sqrt[6]{x^2}=(\sqrt[6]{x})^2=t^2$ и получим уравнение

$$t^2-9t+14=0.$$

Корни этого уравнения

$$t_1=2,\ t_2=7.$$

Таким образом, имеем

$$\sqrt[6]{x}=2 \text{ или } \sqrt[6]{x}=7.$$

Решив эти уравнения, найдем:

$$x=2^6 \text{ или } x=7^6, \text{ т. е. } x=64 \text{ или } x=117\,649.$$

Ответ: 64; 117 649.

?

1. Сформулируйте теорему о тождествах с корнями нечетной степени.
2. Сформулируйте теорему о тождествах с корнями четной степени.
3. Сформулируйте теорему:
   а) об умножении показателя корня на натуральное число $k>1$;
   б) об извлечении корня из корня;
   в) о возведении корня в степень k.
4*. Докажите каждое из тождеств (1) — (6).

Упражнения

Извлеките корень (2.55—2.58).

2.55°. 1) $\sqrt{m^2}$, $m>0$; 2) $\sqrt{y^2}$, $y\leqslant 0$;
3) $\sqrt{m^2}$, $m<0$; 4) $\sqrt{y^2}$, $y>0$;
5) $3\sqrt{t^2}$, $t>0$; 6) $\frac{1}{4}\sqrt{h^2}$, $h\geqslant 0$;
7) $-5\sqrt{\frac{t^2}{25}}$, $t\leqslant 0$; 8) $-\frac{1}{3}\sqrt{9h^2}$, $h<0$.

2.56. 1) $\sqrt[3]{a^3}$; 2) $\sqrt[7]{p^7}$; 3) $\sqrt[5]{32t^5}$;
4) $\sqrt[9]{-k^9}$; 5) $\sqrt[13]{-n^{13}}$; 6) $\sqrt[21]{-b^{21}}$.

2.57. 1) $\sqrt[4]{a^4}$, $a\leqslant 0$; 2) $\sqrt[6]{a^6}$, $a\geqslant 0$;
3) $\sqrt[8]{b^8}$, $b>0$; 4) $\sqrt[12]{b^{12}}$, $b<0$.

2.58. 1) $\sqrt{a^2}$; 2) $\sqrt{16a^2}$; 3) $\sqrt{\frac{1}{4}a^2}$;
4) $\sqrt{0{,}36a^2}$; 5) $\sqrt[4]{a^4}$; 6) $\sqrt[6]{a^6}$;
7) $\sqrt{(a-b)^2}$; 8) $\sqrt[4]{(a-b)^4}$.

2.59. Пусть $t\in\left\{-25;\ -9;\ -5\frac{2}{3};\ 0;\ 5\frac{2}{3};\ 9;\ 25\right\}$. Для каждого значения t найдите значение выражения:

1) $4\sqrt[4]{t^4}$; 2) $2-\sqrt[6]{t^6}$; 3) $-6\cdot\sqrt[3]{t^3}$; 4) $\sqrt[5]{t^5}-1$.

2.60. Вычислите:

1) $\sqrt{(-2)^2} - \sqrt{(-3)^2}$; 2) $\sqrt{(-5)^2} + \sqrt{4^2}$;

3) $\sqrt[4]{(-8)^4} + \sqrt[3]{11^3} - \sqrt{(-2)^6}$; 4) $\sqrt[8]{(-3)^8} + \sqrt{6^2} - \sqrt[7]{4^7}$.

2.61. Найдите значение выражения:

1) $\sqrt[7]{\left(-4\frac{2}{7}\right)^7} : \sqrt[5]{-\left(\frac{5}{14}\right)^5} : \left(\sqrt{0{,}2} + \sqrt[6]{(-0{,}2)^6} \cdot \sqrt[9]{(-1{,}4)^9}\right)$;

2) $\sqrt[12]{\left(-10\frac{2}{5}\right)^{12}} : \sqrt[8]{\left(\frac{13}{18}\right)^8} : \left(\sqrt[9]{0{,}3^9} + \sqrt[7]{(-0{,}3)^7} \cdot \sqrt[10]{1{,}6^{10}}\right)$.

2.62. Упростите выражение:

1) $\sqrt{a^2 + 2ax + x^2}$; 2) $\sqrt{x^2 - 4xy + 4y^2}$;

3) $\sqrt{9 + m^2 - 6m}$; 4) $\sqrt{p^2 + 25 + 10p}$.

2.63. Упростите выражение:

1) $\sqrt[4]{(x+1)^4}$, если а) $x \leqslant -1$; б) $x > -1$;

2) $\sqrt[8]{(x-2)^8}$, если а) $x \geqslant 2$; б) $x < 2$.

2.64. Верно ли, что:

1) $t + 5 - \sqrt[10]{(t-5)^{10}} = 2t$ при $t \leqslant 5$;

2) $6t - 3 - \sqrt[12]{(3-6t)^{12}} = 0$ при $t > \frac{1}{2}$?

2.65. Решите уравнение:

1) $\sqrt[5]{x^5} = 5$; 2) $\sqrt[4]{x^4} = 1{,}5$;

3) $\sqrt[6]{x^6} = 2$; 4) $\sqrt[3]{(2+x)^3} = 6$;

5) $\sqrt[5]{(x-4)^5} = -1$; 6) $\sqrt{x^2} = -3$;

7) $\sqrt[4]{x^4} + 6 = 0$; 8) $\sqrt{x^2} = -7$;

9) $\sqrt[6]{x^6} + 1 = 0$.

2.66°. Вычислите:

1) $\sqrt[6]{36^3}$; 2) $\sqrt[12]{64^2}$; 3) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{25}\right)^2}$;

4) $\sqrt[8]{225^4}$; 5) $\sqrt[10]{2^5}$; 6) $\sqrt[4]{(-3)^{12}}$;

7) $\sqrt[4]{\left(\frac{36}{81}\right)^{16}}$; 8) $\sqrt[4]{3^{12}}$.

Упростите выражение (2.67—2.68).

2.67°. 1) $\sqrt[4]{x^2}$; 2) $\sqrt[16]{a^8}$; 3) $\sqrt[8]{a^4}$;

4) $\sqrt[9]{n^3}$; 5) $\sqrt[6]{4m^2n^4}$; 6) $\sqrt[6]{27x^3y^{12}}$;

7) $\sqrt[4]{625m^8n^4}$; 8) $\sqrt[5]{\frac{243a^{15}b^{10}}{32m^5}}$; 9) $\sqrt[3]{\frac{64a^3b^{12}}{125c^{21}}}$.

2.68. 1) $\sqrt[6]{(\sqrt{7}-2)^3}$; 2) $\sqrt[4]{(1-\sqrt{2})^2}$;

3) $\sqrt[9]{(\sqrt{3}-\sqrt{5})^3}$; 4) $\sqrt[10]{(\sqrt{3}-4)^2}$;

5) $\sqrt[8]{(\sqrt{5}-2)^4}$; 6) $\sqrt[6]{(1-\sqrt{2})^2}$.

2.69. Вычислите:

1) $\sqrt[3]{10^6}$; 2) $\sqrt[3]{3^{12}}$; 3) $\sqrt[3]{(-4)^{24}}$;

4) $\sqrt[6]{(-2{,}5)^{12}}$; 5) $\sqrt[4]{(-0{,}5)^{12}}$; 6) $\sqrt[4]{(-0{,}8)^{16}}$;

7) $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^9}$; 8) $\sqrt[4]{\left(-\frac{1}{3}\right)^{16}}$; 9) $\sqrt[17]{\left(-\frac{2}{3}\right)^{34}}$.

2.70. Упростите выражение:

1) $\sqrt{\sqrt[3]{6}}$; 2) $\sqrt{\sqrt[4]{8}}$; 3) $\sqrt[5]{\sqrt{10}}$;

4) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{(-3)}}$; 5) $\sqrt[3]{\sqrt{5}}$; 6) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{-243}}$;

7) $\sqrt[7]{\sqrt{7}}$; 8) $\sqrt{\sqrt[9]{9}}$; 9) $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[3]{3}}}$;

10) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt{6}}}$; 11) $\sqrt{\sqrt[4]{\sqrt{2}}}$; 12) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{13}}}}$.

2.71. Вычислите:

1) $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$; 2) $\sqrt[3]{\sqrt{729}}$; 3) $\sqrt{\sqrt{256}}$; 4) $\sqrt[5]{\sqrt{1024}}$.

2.72. Сравните числа:

1) $\sqrt[3]{5}$ и $\sqrt[6]{24}$; 2) $\sqrt[6]{2}$ и $\sqrt[18]{10}$;

3) $\sqrt[4]{4}$ и $\sqrt[6]{8}$; 4) $\sqrt[6]{4}$ и $\sqrt[9]{8}$;

5) $\sqrt[10]{6}$ и $\sqrt[5]{2\sqrt[3]{2}}$; 6) $\sqrt[6]{2\sqrt{7}}$ и $\sqrt[4]{3}$.

2.73. Как надо изменить ребро куба объемом 3 м^3, чтобы его объем стал равным:

1) 6 м^3; 2) 9 м^3; 3) 15 м^3; 4) 27 м^3?

Решите уравнение (2.74—2.75).

2.74. 1) $\sqrt[5]{x} = -2$; 2) $\sqrt[3]{x} = 2$; 3) $\sqrt[4]{x} = 3$;

4) $\sqrt[3]{x} + 4 = 0$; 5) $\sqrt[5]{y} - 1 = -2$; 6) $\sqrt[9]{y} + 3 = 4$.

2.75. 1) $\sqrt{x} - 5\sqrt[4]{x} = 0$; 2) $\sqrt{x} + 4\sqrt[4]{x} = 0$;

3) $\sqrt{x} - 5\sqrt[4]{x} + 6 = 0$; 4) $\sqrt{x} + 3\sqrt[4]{x} - 4 = 0$;

5) $\sqrt[5]{x} - 3\sqrt[10]{x} + 2 = 0$; 6) $\sqrt[5]{x} + 3\sqrt[10]{x} - 10 = 0$.

2.4. Действия с корнями нечетной степени

Теорема. Пусть n — нечетное число. Тогда:

1) при любых значениях a и b верно равенство

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}; \quad (1)$$

2) при любых значениях a и $b \neq 0$ верно равенство

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}; \quad (2)$$

3) при любых значениях a и b верно равенство

$$\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}. \quad (3)$$

Доказательство. Легко убедиться, что выражения, входящие в равенства (1) — (3), имеют смысл. Эти равенства, очевидно, верны при $a = 0$, а равенства (1) и (3) и при $b = 0$. Поэтому доказательства проводятся при $a \neq 0$ и $b \neq 0$.

Докажем утверждение 1). Возведем левую и правую части равенства (1) в n-ю степень:

$$\left(\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n\left(\sqrt[n]{b}\right)^n = ab;$$

$$\left(\sqrt[n]{ab}\right)^n = ab$$

(поясните каждое равенство).

Следовательно,

$$\left(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{ab}\right)^n$$

и согласно следствию из п. 2.1 имеем

$$\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}. \boxtimes$$

Тождества (2) и (3) из утверждений 2), 3) теоремы доказываются аналогично (докажите их самостоятельно).

Утверждение 1) теоремы можно сформулировать и так.

! *Пусть n — нечетное число. Корень n-й степени из произведения двух чисел равен произведению корней n-й степени из этих чисел.*

Такая же теорема верна при любом числе перемножаемых корней (доказывается она совершенно аналогично).

Пусть $n > 1$ — нечетное число. Корень n-й степени из произведения нескольких чисел равен произведению корней n-й степени из этих чисел. Таким образом, при любых значениях $a_1, a_2, \ldots, a_k$ верно равенство

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_k} = \sqrt[n]{a_1}\,\sqrt[n]{a_2}\,\ldots\,\sqrt[n]{a_k}. \quad (4)$$

В частности, полагая в этом равенстве $a_1 = a_2 = \ldots = a_k = a$, получим

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}. \quad (5)$$

Утверждение 2) теоремы можно сформулировать так.

! *Пусть n — нечетное число. Корень n-й степени из дроби равен частному от деления корня n-й степени из числителя на корень n-й степени из знаменателя.*

Преобразование выражения $\sqrt[n]{a^nb}$ к виду $a\sqrt[n]{b}$ (в утверждении 3) теоремы) называется ***вынесением множителя из-под знака корня нечетной степени.***

Преобразование выражения $a\sqrt[n]{b}$ к виду $\sqrt[n]{a^nb}$ называется ***внесением множителя под знак корня нечетной степени.***

Заметим, что каждое из равенств (1) — (5) является тождеством.

Пример 1. Найти значение выражения

$$\sqrt[7]{13+\sqrt{41}}\cdot\sqrt[7]{13-\sqrt{41}}.$$

Решение. $\sqrt[7]{13+\sqrt{41}}\cdot\sqrt[7]{13-\sqrt{41}}=$

$$=\sqrt[7]{(13+\sqrt{41})(13-\sqrt{41})}=\sqrt[7]{13^2-(\sqrt{41})^2}=\sqrt[7]{169-41}=$$

$$=\sqrt[7]{128}=\sqrt[7]{2^7}=2.$$

Пример 2. Вынести множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt[5]{y^{11}z}$; б) $\sqrt[7]{\frac{b}{y^8}-\frac{a}{y^{14}}}$.

Решение. а) $\sqrt[5]{y^{11}z}=\sqrt[5]{y^{10}yz}=y^2\sqrt[5]{yz}$;

б) $\sqrt[7]{\frac{b}{y^8}-\frac{a}{y^{14}}}=\sqrt[7]{\frac{by^6}{y^8y^6}-\frac{a}{y^{14}}}=\sqrt[7]{\frac{by^6-a}{y^{14}}}=\frac{\sqrt[7]{by^6-a}}{y^2}$.

Пример 3. Внести множитель под знак корня:

а) $5y\sqrt[7]{\frac{2ay}{625}}$; б) $-\frac{2x}{y}\sqrt[5]{-\frac{7y^3}{8x^9}}$.

Решение. а) $5y\sqrt[7]{\frac{2ay}{625}}=\sqrt[7]{\frac{5^7y^7\cdot 2ay}{5^4}}=\sqrt[7]{5^3\cdot 2ay^8}=$

$=\sqrt[7]{125\cdot 2ay^8}=\sqrt[7]{250ay^8}$;

б) $-\frac{2x}{y}\sqrt[5]{-\frac{7y^3}{8x^9}}=\sqrt[5]{\left(-\frac{2x}{y}\right)^5\left(-\frac{7y^3}{8x^9}\right)}=\sqrt[5]{\frac{-2^5x^5(-7)y^3}{y^52^3x^9}}=$

$=\sqrt[5]{\frac{2^2\cdot 7}{x^4y^2}}=\sqrt[5]{\frac{28}{x^4y^2}}$.

Пример 4. Освободиться от иррациональности в знаменателе:

а) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$; б) $\frac{13}{\sqrt[5]{81}}$; в) $\frac{7}{\sqrt[5]{25}}$; г) $\frac{5}{\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}$.

Решение. а) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}=\frac{1\cdot\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2^2}}=\frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^3}}=\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$;

б) $\frac{13}{\sqrt[5]{81}}=\frac{13}{\sqrt[5]{3^4}}=\frac{13\cdot\sqrt[5]{3}}{\sqrt[5]{3^4}\cdot\sqrt[5]{3}}=\frac{13\sqrt[5]{3}}{\sqrt[5]{3^5}}=\frac{13\sqrt[5]{3}}{3}$;

в) $\frac{7}{\sqrt[5]{25}}=\frac{7}{\sqrt[5]{5^2}}=\frac{7\cdot\sqrt[5]{5^3}}{\sqrt[5]{5^2}\cdot\sqrt[5]{5^3}}=\frac{7\sqrt[5]{125}}{5}$;

г) $\frac{5}{\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}=$

используем формулу суммы кубов $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$, домножив числитель и знаменатель на неполный квадрат разности выражений $\sqrt[3]{6}$ и $\sqrt[3]{4}$, т. е. на $(\sqrt[3]{6})^2-\sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[3]{4}+(\sqrt[3]{4})^2$:

$$=\frac{5(\sqrt[3]{36}-\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{16})}{(\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{6^2}-\sqrt[3]{6\cdot 4}+\sqrt[3]{4^2})}=$$

$$=\frac{5\sqrt[3]{4}(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})}{10}=\frac{\sqrt[3]{4}(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})}{2}.\ ▲$$

?

1. Сформулируйте теорему о корне нечетной степени n из произведения двух чисел.
2. Сформулируйте теорему о корне нечетной степени n из произведения a^nb.
3. Сформулируйте теорему о корне нечетной степени n из дроби.
4. Какое преобразование называется:
   а) вынесением множителя из-под знака корня нечетной степени n;
   б) внесением множителя под знак корня нечетной степени n?

5*. Докажите каждое из тождеств (1) — (5).

Упражнения

2.76. Вычислите:

1) $\sqrt[3]{2}\,\sqrt[3]{500}$;
2) $\sqrt[5]{4}\,\sqrt[5]{8}$;
3) $\sqrt[3]{3}\,\sqrt[3]{9}$;
4) $\sqrt[3]{-84}\,\sqrt[3]{56}\,\sqrt[3]{-126}$;
5) $3\sqrt[3]{36}\,\sqrt[3]{-6}$;
6) $\sqrt[3]{-\frac{1}{9}}\,\sqrt[3]{\frac{8}{3}}$;
7) $\sqrt[3]{108}\,\sqrt[3]{50}\,\sqrt[3]{40}$;
8) $\sqrt[5]{497}\,\sqrt[5]{98}\,\sqrt[5]{16}$;
9) $\sqrt[5]{27}\,\sqrt[5]{36}\,\sqrt[5]{256}$.

Упростите выражение (2.77—2.78).

2.77. 1) $\sqrt[5]{10+2\sqrt{17}}\,\sqrt[5]{10-2\sqrt{17}}$;

2) $\sqrt[3]{12+4\sqrt{5}}\,\sqrt[3]{12-4\sqrt{5}}$;

3) $\sqrt[3]{7-\sqrt{22}}\,\sqrt[3]{7+\sqrt{22}}$;

4) $\sqrt[5]{17-\sqrt{46}}\,\sqrt[5]{17+\sqrt{46}}$.

2.78. 1) $\frac{1}{2}(2\sqrt[3]{135}-5\sqrt[3]{5}-10\sqrt[3]{40})\sqrt[3]{25}$;

2) $4(\sqrt[3]{9}-7\sqrt[3]{72}+6\sqrt[3]{1125})\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$;

3) $\frac{4}{3}\left(6\sqrt[3]{\frac{9}{4}}-5\sqrt[3]{18}+9\sqrt[3]{\frac{16}{81}}\right)\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$;

4) $\frac{1}{3}\left(6\sqrt[3]{4}-3\sqrt[3]{32}+1{,}8\sqrt[3]{\frac{500}{27}}\right)\sqrt[3]{4}$.

Найдите значение выражения (2.79—2.80).

2.79. 1) $\sqrt[3]{16}:\sqrt[3]{2}$;
2) $\sqrt[3]{-0{,}1}\cdot\sqrt[3]{0{,}08}$;

3) $\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}$;
4) $\frac{\sqrt[5]{-128}}{\sqrt[5]{-4}}$;

5) $2\sqrt[3]{\frac{4}{5}}:\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{32}{625}}$;
6) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{96}:3\sqrt[3]{\frac{3}{16}}$.

2.80. 1) $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{4}}-\sqrt[3]{16}\right):\sqrt[3]{2}$;
2) $\left(\sqrt[5]{729}+\sqrt[5]{-\frac{1}{81}}\right):\sqrt[5]{3}$;

3) $(3\sqrt[3]{4}+6\sqrt[3]{-32}-15\sqrt[3]{-108}):3\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$;

4) $\left(3\sqrt[3]{144}-7\sqrt[3]{-18}+4\sqrt[3]{-\frac{16}{3}}\right):2\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$.

Упростите выражение (2.81—2.83).

2.81. 1) $\frac{x}{a}\sqrt[3]{\frac{a^2}{x}}\,\frac{1}{4}a\sqrt[3]{\frac{8a}{x^4}}$;

2) $5\sqrt[3]{\frac{2a^4}{25x^5}\sqrt[3]{\frac{4a^5}{5x^2}}}$;

3) $\frac{x^2}{a^2}\sqrt[3]{\frac{3a}{x^2}\cdot\frac{1}{a^2x^3}\sqrt[3]{\frac{x^3}{a^4}}}$;

4) $\frac{b^3}{a}\sqrt[5]{\frac{b^9}{a}}\,4\frac{a^3}{b^3}\sqrt[5]{a^3b}\,\frac{1}{8}\,\frac{a^4}{b}\sqrt[5]{\frac{b^4}{a^3}}$;

5) $\sqrt[3]{\frac{3x^{-2}y^5}{5x^4y^{-2}}}\,\sqrt[3]{\left(\frac{6x^{-2}}{5y^3}\right)^{-2}}\,\sqrt[3]{-120x^5y^2}$;

6) $\sqrt[3]{\left(\frac{2m^{-3}n}{9m^5n^{-1}}\right)^{-2}}\,\sqrt[3]{\left(-\frac{3n^{-4}}{4m^{-5}}\right)^{-1}}\,\sqrt[3]{72m^4n^6}$;

7) $a\sqrt[5]{a^4b^3}\,ab^2\sqrt[3]{ab^2}\,\sqrt[5]{ab^4}\,a\sqrt[3]{\frac{b^4}{a}}$;

8) $b\sqrt[3]{\frac{a^5}{b}}\,a^2\sqrt[7]{a^5b^2}\,ab\sqrt[3]{a^4b^7}\,\sqrt[7]{a^2b^7}$.

2.82. 1) $\sqrt[3]{3a^2}:\sqrt[3]{a}$;
2) $\sqrt[3]{4a^8}:\sqrt[3]{2a^2}$;

3) $\sqrt[5]{64a^3}:\sqrt[5]{-2a^{-2}}$;
4) $\sqrt[5]{-27a^4}:\sqrt[5]{-\frac{1}{9}a^3}$;

5) $\sqrt[5]{-\frac{3a^2}{4}}:\sqrt[5]{\frac{8}{81a^3}}$;
6) $\sqrt[3]{-\frac{25}{a^2}}:\sqrt[3]{\frac{8a}{5}}$.

2.83. 1) $(2ab\sqrt[3]{-m^2}-m\sqrt[3]{-b}):\sqrt[3]{-bm}$;

2) $\left(n^2m\sqrt[5]{-n^4m^2}+m\sqrt[5]{\frac{n^4}{m^3}}\right):\sqrt[5]{-\frac{m^2}{n}}$;

3) $(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2})(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})$;

4) $(\sqrt[3]{a^2b}-2\sqrt[3]{2ab^2}+b\sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{2b})$.

2.84. Выполните действия:

1) $(\sqrt[3]{a^2})^2$; 2) $(\sqrt[6]{a^2})^3$;
3) $(-2\sqrt[3]{-2})^5$; 4) $(-2\sqrt[3]{-2})^4$;
5) $(\sqrt[3]{4x^2})^2$; 6) $(-a\sqrt[5]{a^3x})^4$;
7) $(ax^2\sqrt[3]{2ax^2})^4$; 8) $\left(-\frac{3}{a^2}\sqrt[5]{\frac{2}{a^4}}\right)^3$.

2.85. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) найдите длину высоты CD, если:

1) $AD = \sqrt[3]{4}$, $BD = \sqrt[3]{16}$;
2) $AD = \sqrt[7]{8}$, $BD = \sqrt[7]{16}$.

Вынесите множитель из-под знака корня (2.86—2.87).

2.86. 1) $\sqrt[3]{375}$; 2) $\sqrt[3]{24}$; 3) $\sqrt[3]{-54}$;
4) $\sqrt[3]{-686}$; 5) $\sqrt[5]{-96}$; 6) $\sqrt[5]{300\,000}$;
7) $\sqrt[5]{-972}$; 8) $\sqrt[7]{-384}$.

2.87. 1) $\sqrt[3]{x^7b}$; 2) $\sqrt[3]{16x^2y^6a^8}$; 3) $\sqrt[5]{\frac{x^5a^6}{y^{12}b^7}}$;
4) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{54x^4a^5}$; 5) $\frac{3x}{8}\sqrt[3]{64x^5y^9}$;
6) $\frac{a}{x}\sqrt[5]{-\frac{243x^{10}y^7}{1024a^{15}}}$; 7) $\sqrt[3]{\frac{m^3}{n^3}-1}$;
8) $\sqrt[5]{-\frac{a}{x^6}+\frac{b}{x^{10}}}$; 9) $\sqrt[3]{\frac{x}{y^5}-\frac{y}{x^5}}$.

2.88. Внесите множитель под знак корня:

1) $2x\sqrt[3]{3ax}$; 2) $4xy\sqrt[5]{x}$;
3) $\frac{a}{b}\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}$; 4) $2m^2n\sqrt[3]{-\frac{3}{2mn}}$;

5) $-\frac{3n}{4m}\sqrt[3]{2mn}$; 6) $-\frac{a}{b}\sqrt[5]{-\frac{b^7}{a^8}}$;
7) $\frac{\sqrt[3]{a^3-a^4}}{a}$; 8) $\frac{\sqrt[3]{m^5+1}}{m}$.

Освободитесь от иррациональности в знаменателе (2.89—2.91).

2.89. 1) $\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$; 2) $\frac{1}{\sqrt[5]{2}}$; 3) $\frac{1}{\sqrt[3]{-3}}$; 4) $\frac{1}{\sqrt[7]{-2}}$;
5) $\frac{3}{\sqrt[3]{9}}$; 6) $\frac{18}{\sqrt[3]{36}}$; 7) $\frac{12}{\sqrt[5]{16}}$; 8) $\frac{24}{\sqrt[5]{81}}$.

2.90. 1) $\frac{a}{\sqrt[3]{b}}$; 2) $\frac{m}{n\sqrt[3]{m^2}}$; 3) $\frac{t^2-1}{\sqrt[3]{t-1}}$;
4) $\frac{t^4-1}{\sqrt[3]{t^2+1}}$; 5) $\frac{2-x}{\sqrt[3]{(2-x)^2}}$; 6) $\frac{4+x}{\sqrt[5]{(4+x)^4}}$.

2.91*. 1) $\frac{k}{\sqrt[3]{k^2}+\sqrt[3]{k}+1}$; 2) $\frac{k}{\sqrt[3]{k^2}-2\sqrt[3]{k}+4}$;
3) $\frac{m}{\sqrt[3]{m^2}-3}$; 4) $\frac{m}{\sqrt[3]{m}+5}$;
5) $\frac{15}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}$; 6) $\frac{18}{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{20}+\sqrt[3]{16}}$;
7) $\frac{1}{4\sqrt[3]{4}-8\sqrt[3]{2}+16}$; 8) $\frac{1}{9\sqrt[3]{9}+3^3\cdot\sqrt[3]{3}+81}$.

Решите уравнение (2.92—2.93).

2.92°. 1) $\sqrt[3]{4x+1}=-4$; 2) $\sqrt[3]{2x+3}=-3$;
3) $\sqrt[5]{3-3x}=1$; 4) $\sqrt[7]{2x+13}=2$;
5) $\sqrt[6]{6+x}=-2$; 6) $\sqrt[3]{3x-2}=-1$;
7) $\sqrt[3]{x^2+14x-16}=-4$; 8) $\sqrt[3]{4x-50+x^2}=3$.

2.93. 1) $\sqrt[5]{5x+1}=\sqrt[5]{2x+10}$; 2) $\sqrt[7]{4+x}=\sqrt[7]{2x+12}$;
3) $3\sqrt[3]{x+2}=\sqrt[3]{2x-5}$; 4) $\sqrt[3]{7x+1}=2\sqrt[3]{x+4}$;
5) $\sqrt[3]{3x+8}=\sqrt[3]{x^2-2}$; 6) $\sqrt[7]{x+2}\cdot\sqrt[7]{4x-5}=\sqrt[7]{-3}$.

4—1004

2.5. Действия с корнями четной степени

Теорема. Пусть n — четное число. Тогда:

1) при любых неотрицательных значениях a и b верно равенство

$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}; \qquad (1)$$

2) при любых неотрицательных значениях a и положительных значениях b верно равенство

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}; \qquad (2)$$

3) при любых значениях a и неотрицательных значениях b верно равенство

$$\sqrt[n]{a^n b}=|a|\sqrt[n]{b}. \qquad (3)$$

Доказательство. Легко убедиться, что выражения, входящие в равенства (1) — (3), имеют смысл. Эти равенства, очевидно, верны при $a=0$, а равенства (1) и (3) и при $b=0$. Поэтому доказательства проводятся при $a>0$ и $b>0$.

Докажем утверждение 3). При любых значениях a и $b \geqslant 0$ числа $\sqrt[n]{a^n b}$ и $|a|\sqrt[n]{b}$ неотрицательные (объясните почему).

Возведя левую и правую части равенства (3) в n-ю степень, получим

$$a^n b=|a|^n b.$$

Это верное числовое равенство, поскольку n — четное число и поэтому $a^n=|a|^n$. Согласно следствию из п. 2.1 верно и равенство

$$\sqrt[n]{a^n b}=a\sqrt[n]{b}. \ \boxtimes$$

Утверждения 1), 2) доказываются аналогично. Докажите равенства (1) и (2) самостоятельно.

Утверждение 1) теоремы можно сформулировать и так:

Пусть n — четное число. Корень n-й степени из произведения двух неотрицательных чисел равен произведению корней n-й степени из этих чисел.

Такая же теорема верна при любом числе корней (доказывается она аналогично):

пусть $n \geqslant 2$ — четное число. Корень n-й степени из произведения нескольких неотрицательных чисел равен произведению корней n-й степени из этих чисел.

Таким образом, для любых неотрицательных чисел a_1, a_2, ..., a_k верно равенство

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_k}=\sqrt[n]{a_1}\sqrt[n]{a_2}\ldots\sqrt[n]{a_k}. \qquad (4)$$

В частности, полагая в этом тождестве $a_1=a_2=\ldots=a_k=a$, получим

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k=\sqrt[n]{a^k}. \qquad (5)$$

Утверждение 2) теоремы можно сформулировать и так.

Пусть n — четное число. Корень n-й степени из дроби с неотрицательным числителем и положительным знаменателем равен частному от деления корня n-й степени из числителя на корень n-й степени из знаменателя.

Преобразование выражения $\sqrt[n]{a^n b}$ к виду $|a|\sqrt[n]{b}$ (в утверждении 3) теоремы) называется ***вынесением множителя из-под знака корня четной степени.***

Преобразование выражения $|a|\sqrt[n]{b}$ к виду $\sqrt[n]{a^n b}$ называется ***внесением множителя под знак корня четной степени.***

Заметим, что каждое из равенств (1) — (5), рассматриваемых в этом пункте, является тождеством.

Пример 1. Вынести множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt[n]{mx^{14}}$; б) $\sqrt[6]{\frac{256}{y^{13}}}$; в) $\sqrt[4]{\frac{64n^8}{x^{12}}}$.

Решение. а) $\sqrt[n]{mx^{14}}=|x^7|\sqrt{m}$;

б) $\sqrt[6]{\frac{256}{y^{13}}}=\sqrt[6]{\frac{2^8}{y^{12}y}}=\left|\frac{2}{y^2}\right|\sqrt[6]{\frac{4}{y}}=\frac{2}{y^2}\sqrt[6]{\frac{4}{y}}$;

в) $\sqrt[4]{\frac{64n^8}{x^{12}}}=\sqrt[4]{\frac{2^6 n^8}{x^{12}}}=\left|\frac{2n^2}{x^3}\right|\sqrt[4]{2^2}=\frac{2n^2}{|x^3|}\sqrt[4]{4}$.

Пример 2. Преобразовать в произведение корней выражение $\sqrt{ab}$ при $a<0$ и $b<0$.

Решение. $\sqrt{ab}=\sqrt{(-a)(-b)}=\sqrt{-a}\sqrt{-b}$.

Можно было бы, например, записать и так:

$$\sqrt{ab}=\sqrt{(-2a)\left(-\frac{b}{2}\right)}=\sqrt{-2a}\sqrt{-\frac{b}{2}}.$$

Или так:

$$\sqrt{ab}=\sqrt{\left(-\frac{3}{7}a\right)\left(-\frac{7}{3}b\right)}=\sqrt{-\frac{3}{7}a}\sqrt{-\frac{7}{3}b}\text{ и т. д.}$$

Пример 3. Внести множитель под знак корня:

а) $p\sqrt[6]{7}$ при $p<0$; б) $p\sqrt[6]{7}$ при $p>0$.

Решение. а) Так как $p<0$, то $p\sqrt[6]{7}<0$, значит,

$$p\sqrt[6]{7}=-(-p)\sqrt[6]{7}=-\sqrt[6]{(-p)^6\cdot 7}=-\sqrt[6]{7p^6}.$$

б) Так как $p>0$, то $p\sqrt[6]{7}>50$, значит,

$$p\sqrt[6]{7}=\sqrt[6]{7p^6}.$$

Пример 4. Найти значение выражения:

а) $\sqrt[4]{7-\sqrt{33}}\cdot\sqrt[4]{7+\sqrt{33}}$; б)* $\sqrt[4]{17-12\sqrt{2}}$.

Решение. а) $\sqrt[4]{7-\sqrt{33}}\cdot\sqrt[4]{7+\sqrt{33}}=\sqrt[4]{(7-\sqrt{33})\,7+\sqrt{33}}=$

$=\sqrt[4]{(7-\sqrt{33})^2}=\sqrt[4]{49-33}=\sqrt[4]{16}=2.$

б) $\sqrt[4]{17-12\sqrt{2}}=\sqrt[4]{(3-2\sqrt{2})^2}=\sqrt[4]{((1-\sqrt{2})^2)^2}=$

$=|1-\sqrt{2}|=\sqrt{2}-1.$

Пример 5. Упростить выражение

$$\sqrt[10]{(\sqrt{2}-3)^2}\cdot\sqrt[10]{(\sqrt{2}-3)^8}.$$

Решение. $\sqrt[10]{(\sqrt{2}-3)^2}\cdot\sqrt[10]{(\sqrt{2}-3)^8}=\sqrt[10]{(\sqrt{2}-3)^{10}}=|\sqrt{2}-3|=$

$=3-\sqrt{2}.$

Пример 6. Освободиться от иррациональности в знаменателе:

а) $\dfrac{7}{\sqrt[8]{4}}$; б) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{\sqrt{7}-\sqrt{3}}}$.

Решение. а) $\dfrac{7}{\sqrt[8]{4}}=\dfrac{7}{\sqrt[8]{2^2}}=\dfrac{7}{\sqrt[4]{2}}=\dfrac{7\sqrt[4]{2^3}}{\sqrt[4]{2}\sqrt[4]{2^3}}=\dfrac{7\sqrt[4]{8}}{2}$.

б) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{\sqrt{7}-\sqrt{3}}}=\dfrac{\sqrt[4]{\sqrt{7}+\sqrt{3}}}{\sqrt[4]{\sqrt{7}-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[4]{\sqrt{7}+\sqrt{3}}}=$

$=\dfrac{\sqrt[4]{\sqrt{7}+\sqrt{3}}}{\sqrt[4]{4}}=\dfrac{\sqrt[4]{\sqrt{7}+\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}\sqrt[4]{\sqrt{7}+\sqrt{3}}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt[4]{4(\sqrt{7}+\sqrt{3})}}{2}$.

Пример 7. Решить уравнение:

а) $\sqrt[8]{2x-7}=-1$; б) $\sqrt[4]{4x+19}=2$.

Решение. а) Уравнение $\sqrt[8]{2x-7}=-1$ не имеет решений, так как арифметический корень четной степени не может иметь отрицательного значения.

Ответ: решений нет.

б) По определению арифметического корня четвертой степени получим, что уравнение $\sqrt[4]{4x+19}=2$ равносильно уравнению $4x+19=2^4$, откуда $x=-0{,}75$.

Ответ: $-0{,}75$.

1. Сформулируйте теорему о корне четной степени n из произведения двух неотрицательных чисел (нескольких неотрицательных чисел).
2. Сформулируйте теорему о корне четной степени n из произведения a^nb.
3. Сформулируйте теорему о корне четной степени n из дроби с неотрицательным числителем и положительным знаменателем.
4. Какое преобразование называется:
   а) вынесением множителя из-под знака корня четной степени;
   б) внесением множителя под знак корня четной степени?

5*. Докажите каждое из тождеств (1) — (5).

Упражнения

Найдите значение выражения (2.94—2.95).

2.94°. 1) $\sqrt{4\cdot 81}$; 2) $\sqrt{36\cdot 625}$; 3) $\sqrt{75\cdot 27}$;
4) $\sqrt{18\cdot 32}$; 5) $\sqrt[4]{16\cdot 625}$; 6) $\sqrt[4]{16\cdot 0{,}0001}$;
7) $\sqrt[4]{48\cdot 27}$; 8) $\sqrt[4]{3\frac{3}{8}\cdot 1\frac{1}{2}}$.

2.95°. 1) $\sqrt{25\cdot 16\cdot 100}$; 2) $\sqrt{64\cdot 81\cdot 225}$;
3) $\sqrt[4]{256\cdot 0{,}0016\cdot 625}$; 4) $\sqrt[4]{11^4\cdot 3^8}$;
5) $\sqrt[4]{1{,}5^4\cdot 4^8\cdot 0{,}01^4}$; 6) $\sqrt[10]{\left(\frac{2}{3}\right)^{10}\left(\frac{3}{8}\right)^{10}4^{10}}$.

2.96°. Упростите выражение:

1) $\sqrt{3^6}$; 2) $\sqrt{7^4}$; 3) $\sqrt[4]{5^{12}}$;
4) $\sqrt[4]{6^8}$; 5) $\sqrt{25a^2}$; 6) $\sqrt{49x^4}$;
7) $\sqrt[4]{1296b^4}$; 8) $\sqrt[4]{64c^{12}}$; 9) $\sqrt[4]{a^8b^{12}}$;
10) $\sqrt[4]{a^{16}c^4}$; 11) $\sqrt[4]{81x^8y^{12}}$; 12) $\sqrt[4]{729x^6y^{12}}$.

2.97. Упростите выражение ($m\in Z$):

1) $\sqrt{6\frac{1}{4}a^6c^{4m}}$; 2) $\sqrt{1\frac{11}{25}a^4b^{10m}}$;
3) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}a^{8m}b^{16}}$; 4) $\sqrt[4]{\frac{256}{625}a^{12}b^{8m}}$.

Вынесите множитель из-под знака корня (2.98—2.99).

2.98°. 1) $\sqrt{8}$; 2) $\sqrt{48}$; 3) $\sqrt{175}$;
4) $\sqrt{128}$; 5) $\sqrt[4]{243}$; 6) $\sqrt[4]{1250}$;
7) $\sqrt[6]{1458}$; 8) $\sqrt[6]{320}$; 9) $\sqrt{\frac{50}{49}}$;
10) $\sqrt{7\frac{7}{48}}$; 11) $\sqrt{11\frac{11}{120}}$; 12) $\sqrt[4]{1\frac{47}{81}}$.

2.99. 1) $\sqrt{x^3}$; 2) $\sqrt{ax^6}$; 3) $\sqrt[4]{\frac{a^5}{81}}$;
4) $\sqrt[4]{\frac{256}{x^9}}$; 5) $14\sqrt{\frac{5a^3}{98}}$; 6) $\frac{3x}{8}\sqrt[4]{32x^5y^8}$;
7) $\frac{3}{4a}\sqrt[4]{\frac{32a^5b^6}{243x^4y^7}}$; 8) $\frac{2c}{3}\sqrt[4]{81c^6m^5}$.

2.100. Внесите множитель под знак корня:

1) $2\sqrt{5}$; 2) $3\sqrt{6}$; 3) $2\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$; 4) $\frac{2}{3}\sqrt[4]{6}$;
5) $2a\sqrt[4]{\frac{1}{32}}$, где $a>0$; 6) $2xy\sqrt[6]{\frac{x}{y^2}}$, где $y>0$;
7) $n^2\sqrt[10]{\frac{2}{n^5}}$; 8) $\frac{ab}{2}\sqrt[4]{\frac{4}{a^3b^2}}$, где $b>0$.

2.101. Вынесите множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt{-t^3}$; 2) $\sqrt[4]{-t^{11}}$; 3) $\sqrt{m^4n^5}$; 4) $\sqrt{m^5n^{10}}$;
5) $\sqrt{16m^2n}$, где $m<0$; 6) $\sqrt{64m^2n^3}$, где $m>0$;
7) $\sqrt{m^5n^{10}}$, где $m>0$; 8) $\sqrt[4]{81m^5n^4}$, где $n<0$;
9) $\sqrt{m^3n^3}$; 10) $\sqrt[4]{m^5n^5}$;
11) $\sqrt[4]{m^6n^8}$, где $m<0$; 12) $\sqrt{m^2n^2t}$, где $m>0$, $n<0$.

2.102*. Внесите множитель под знак корня:

1) $m\sqrt{5}$, где $m<0$; 2) $m\sqrt{-m}$;
3) $m\sqrt[4]{m-2}$; 4) $m\sqrt[4]{n}$, где $m<0$;
5) $m\sqrt[4]{5}$, где $m<0$; 6) $m\sqrt[6]{3}$;
7) $(m+4)\sqrt[4]{\frac{1}{m+4}}$; 8) $(m-1)\sqrt{\frac{2}{1-m}}$.

2.103. Вычислите:

1) $\sqrt[8]{9^4}$; 2) $\sqrt[12]{27^4}$; 3) $\sqrt[6]{16^3}$;
4) $\sqrt[8]{1{,}69^4}$; 5) $\sqrt[16]{1296^4}$; 6) $\sqrt[6]{\left(\frac{49}{16}\right)^3}$;

7) $\sqrt[12]{\left(\frac{125}{81}\right)^4}$; 8) $\sqrt[4]{\left(\frac{81}{121}\right)^2}$; 9) $\sqrt[8]{\left(\frac{10000}{256}\right)^2}$.

2.104. Выполните действия:

1) $\left(\sqrt[12]{\frac{m^5}{n^4}}\right)^4$; 2) $\left(\sqrt[4]{\frac{11}{x^2y^4}}\right)^8$;

3) $\left(\sqrt[16]{\frac{a^5}{b^6}}\right)^4$; 4) $\left(\sqrt[8]{\frac{16}{a^2d^3}}\right)^4$.

2.105*. Найдите значение выражения:

1) $\sqrt[4]{9-\sqrt{65}}\cdot\sqrt[4]{9+\sqrt{65}}$; 2) $\sqrt{3-\sqrt{5}}\cdot\sqrt{3+\sqrt{5}}$;

3) $\sqrt{10-2\sqrt{21}}$; 4) $\sqrt{6-2\sqrt{5}}$;

5) $\sqrt[4]{17+12\sqrt{2}}$; 6) $\sqrt[4]{28-16\sqrt{3}}$.

Освободитесь от иррациональности в знаменателе (2.106—2.109).

2.106. 1) $\frac{2}{\sqrt{6}}$; 2) $\frac{6}{\sqrt{3}}$; 3) $\frac{4}{\sqrt[4]{8}}$;

4) $\frac{5}{\sqrt[6]{125}}$; 5) $-\frac{4}{\sqrt{12}}$; 6) $-\frac{3}{2\sqrt[4]{3}}$;

7) $\frac{6}{5\sqrt[4]{32}}$; 8) $\frac{9}{4\sqrt[8]{64}}$; 9) $\frac{3}{7\sqrt[6]{81}}$.

2.107. 1) $\frac{1}{\sqrt{a-b}}$; 2) $\frac{a+b}{\sqrt[4]{(a+b)^3}}$; 3) $\frac{a^2-b^2}{\sqrt[4]{a-b}}$; 4) $\frac{a^2-b^2}{\sqrt[6]{(a+b)^5}}$;

5) $\frac{a^2+b^2}{\sqrt[8]{a^4+2a^2b^2+b^4}}$; 6) $\frac{a^4-b^4}{\sqrt[8]{(a^2-2ab+b^2)^3}}$.

2.108. 1) $\frac{1}{1+\sqrt{5}}$; 2) $\frac{1}{1-\sqrt{6}}$;

3) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-5}$; 4) $\frac{7}{\sqrt{7}-7}$;

5) $\frac{6\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$; 6) $\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$;

7)* $\frac{243}{(\sqrt{6}-\sqrt{7})^4}$; 8)* $\frac{16}{(\sqrt{7}+\sqrt{6})^4}$;

9)* $\frac{26}{2-\sqrt[4]{3}}$; 10)* $\frac{9}{\sqrt[4]{3}-\sqrt{2}}$.

2.109*. 1) $\frac{33}{\sqrt{3}+\sqrt{5}+2}$; 2) $\frac{36}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+2}$;

3) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{8}-\sqrt{3}}$; 4) $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{6}}{\sqrt{7}-\sqrt{6}+\sqrt{3}}$;

5) $\frac{4}{2-\sqrt{2}-\sqrt{6}+\sqrt{3}}$; 6) $\frac{10}{\sqrt{10}+\sqrt{14}+\sqrt{15}+\sqrt{21}}$;

7) $\frac{1}{2+\sqrt{3}+\sqrt[4]{12}}$; 8) $\frac{1}{2+\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{4}+\sqrt[4]{8}}$.

2.110*. При каких значениях t верно равенство:

1) $\sqrt[6]{t^6}=-t$; 2) $\sqrt[4]{t^4}=t$;

3) $\sqrt[4]{t^4}=|t|$; 4) $t\sqrt[8]{5}=\sqrt[8]{5t^8}$;

5) $t\sqrt[4]{16\cdot 0{,}0001}=-0{,}2\sqrt[4]{t^4}$; 6) $t\sqrt[4]{4}=-\sqrt[4]{4t^4}$?

2.111*. При каких значениях k верно равенство:

1) $\sqrt[10]{(k-4)^2}=\sqrt[5]{k-4}$;

2) $\sqrt[8]{(2-3k)^4}=\sqrt{2-3k}$;

3) $\sqrt{k-2}\cdot\sqrt{k+1}=\sqrt{(k-2)(k+1)}$;

4) $\sqrt[4]{\frac{k+4}{k-2}}=\frac{\sqrt[4]{-k-4}}{\sqrt[4]{2-k}}$?

Решите уравнение (2.112—2.115).

2.112°. 1) $\sqrt{4x+1}=0$; 2) $\sqrt[4]{2x+3}=0$;

3) $\sqrt[4]{4x+1}=-4$; 4) $\sqrt{2x+3}=-3$;

5) $\sqrt{4x+1}=4$; 6) $\sqrt{2x+3}=3$;

7) $\sqrt{4x^2+5x-2}=2$; 8) $\sqrt{3x-5x^2+23}=3$.

2.113. 1) $\sqrt[4]{x^2-36}=\sqrt[4]{2x-1}$; 2) $\sqrt[8]{8-5x}=\sqrt[8]{x^2-16}$;

3) $\sqrt{4x+1}=\sqrt{x^2+3x-1}$; 4) $\sqrt{2x+3}=\sqrt{x^2+x-1}$;

5) $\sqrt{1+\sqrt{x+38}}=3$; 6) $\sqrt{7-\sqrt{x+1}}=2$.

2.114. 1) $\sqrt[3]{x}-3\sqrt[6]{x}=10$; 2) $\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}=5$;

3) $\sqrt{2x-3}+6=5\sqrt[4]{2x-3}$;

4) $\sqrt[4]{3x+4}-\sqrt[8]{3x+4}-2=0$.

2.115. 1) $\sqrt{x+2+\sqrt{3}}=\sqrt[4]{3}$; 2) $\sqrt{\sqrt{5}-2x}=\sqrt[4]{5}$;

3) $\sqrt[6]{2x-1+6\sqrt{6}}=\sqrt[6]{6\sqrt{6}}$; 4) $\sqrt{x-1-2\sqrt{3}}=\sqrt{3}-1$;

5) $\sqrt{x-5-2\sqrt{10}}=\sqrt{5}-\sqrt{2}$;

6) $\sqrt{2\sqrt{14}-3x}=\sqrt{7}+\sqrt{2}$.

▲ 2.6. Действия с корнями n-й степени

Рассмотрим примеры решения некоторых заданий с использованием свойств корней как четной, так и нечетной степеней.

Пример 1. Освободиться от иррациональности в знаменателе:

а) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{\sqrt{2}-\sqrt{7}}}$; б)* $\dfrac{1}{\sqrt[4]{\sqrt[3]{5}+1}}$.

Решение. а) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{\sqrt{2}-\sqrt{7}}}=$

умножив числитель и знаменатель дроби на выражение $\sqrt[3]{\sqrt{2}+\sqrt{7}}$, получим

$$=\frac{\sqrt[3]{\sqrt{2}+\sqrt{7}}}{\sqrt[3]{\sqrt{2}-\sqrt{7}}\sqrt[3]{\sqrt{2}+\sqrt{7}}}=\frac{\sqrt[3]{\sqrt{2}+\sqrt{7}}}{\sqrt[3]{-5}}=$$

умножив числитель и знаменатель дроби на выражение $\sqrt[3]{(-5)^2}$, получим

$$=\frac{\sqrt[3]{25(\sqrt{2}+\sqrt{7})}}{-5}.$$

б) Умножив числитель и знаменатель данной дроби на выражение $\sqrt[4]{\sqrt[3]{5^2}-\sqrt[3]{5}+1}$, по формуле суммы кубов получим: $\dfrac{1}{\sqrt[4]{\sqrt[3]{5}+1}}=\dfrac{\sqrt[4]{\sqrt[3]{5^2}-\sqrt[3]{5}+1}}{\sqrt[4]{(\sqrt[3]{5}+1)(\sqrt[3]{5^2}-\sqrt[3]{5}+1)}}=\dfrac{\sqrt[4]{\sqrt[3]{5^2}-\sqrt[3]{5}+1}}{\sqrt[4]{5+1}}=$

умножив числитель и знаменатель на $\sqrt[4]{6^3}$, получим

$$=\frac{\sqrt[4]{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{5}+1}\cdot\sqrt[4]{6^3}}{\sqrt[4]{6}\cdot\sqrt[4]{6^3}}=\frac{\sqrt[4]{216(\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{5}+1)}}{6}.$$

Пример 2. Решить уравнение:

а) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x^4}}=1$; б) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^3}}=1$.

Решение. а) Данное уравнение равносильно уравнению

$$\sqrt[3]{|x|}=1,$$

решая которое, имеем

$$|x|=1, \text{ т. е. } x=-1 \text{ или } x=1.$$

Ответ: -1; 1.

б) *Способ 1.* $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^3}}=1$,

$\sqrt[4]{x}=1$,

$x=1$.

Ответ: 1.

Способ 2. $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^3}}=1$,

$\sqrt[12]{x^3}=1$,

$x^3=1^{12}$, т. е. $x=1$.

Ответ: 1.

(Поясните, почему в уравнении б) не появился знак модуля.)

Пример 3. Решить уравнение:

$$\frac{\sqrt[6]{-x^7}\cdot\sqrt[6]{-x^{13}}}{\sqrt[3]{-x}\cdot\sqrt[3]{-x^3}}=9.$$

Решение. Поскольку корень 6-й степени существует только из неотрицательного числа, а знаменатель дроби не может быть равным нулю, то значения x в данном уравнении должны быть только отрицательными. Таким образом, данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt[6]{x^{20}}}{\sqrt[3]{x^4}} = 9, \\ x < 0. \end{cases}$$

Решив ее, получим $\begin{cases} x^2 = 9, \\ x < 0, \end{cases}$ откуда $x = -3$.

Ответ: -3.

Пример 4. Верно ли, что равенство является тождеством:

а) $\sqrt[4]{m^3} + \sqrt[3]{-m^2} = \sqrt[12]{m^8}\left(\sqrt[12]{m} - 1\right)$;

б) $\sqrt[12]{-m^{13}} + \sqrt[3]{m^5} = \sqrt[12]{-m^{13}}\left(1 + \sqrt[12]{-m^7}\right)$?

Решение. а) Поскольку корень четной степени существует только из неотрицательного числа, а корень нечетной степени — из любого, то $m \geqslant 0$. Использовав свойства корней, преобразуем левую часть равенства:

$$\sqrt[4]{m^3} + \sqrt[3]{-m^2} = \sqrt[4\cdot 3]{m^{3\cdot 3}} - \sqrt[3\cdot 4]{m^{2\cdot 4}} = \sqrt[12]{m^9} - \sqrt[12]{m^8} =$$
$$= \sqrt[12]{m^8}\left(\sqrt[12]{m} - 1\right).$$

Получили, что равенство а) является тождеством при $m \geqslant 0$.

Ответ: верно.

б) Поскольку $\sqrt[12]{-m^{13}}$ существует только при $-m^{13} \geqslant 0$, то $m \leqslant 0$. Использовав свойства корней, преобразуем левую часть равенства:

$$\sqrt[12]{-m^{13}} + \sqrt[3]{m^5} = \sqrt[12]{-m^{13}} + \sqrt[3\cdot 4]{m^{5\cdot 4}} = \sqrt[12]{-m^{13}} + \sqrt[12]{m^{20}} =$$
$$= \sqrt[12]{-m^{13}} + \sqrt[12]{(-m)^{13}\cdot(-m)^7} = \sqrt[12]{-m^{13}}\left(1 + \sqrt[12]{-m^7}\right).$$

При $m \leqslant 0$ равенство б) является тождеством.

Ответ: верно.

Пример 5. Решить неравенство:

а) $\sqrt[7]{2x - 5} > -1$; б) $\sqrt[4]{3x + 8} \geqslant -6$;

в) $\sqrt[10]{11 - 4x} \leqslant 0$; г) $\sqrt[6]{21 - 2x} \leqslant 1$.

Решение. а) По определению корня нечетной степени неравенство $\sqrt[7]{2x - 5} > -1$ равносильно неравенству $2x - 5 > (-1)^7$, решив которое, получим $x > 2$.

Ответ: $(2; +\infty)$.

б) По определению арифметического корня четной степени значения выражения $\sqrt[4]{3x + 8}$ неотрицательны при всех значениях x, при которых это выражение имеет смысл, т. е., когда значения подкоренного выражения неотрицательны. Таким образом, неравенство $\sqrt[4]{3x + 8} \geqslant -6$ равносильно неравенству $3x + 8 \geqslant 0$, т. е. $x \geqslant -2\frac{2}{3}$.

Ответ: $\left[-2\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

в) По определению арифметического корня четной степени значения выражения $\sqrt[10]{11 - 4x}$ неотрицательны при всех значениях x, при которых это выражение имеет смысл и, следовательно, отрицательными быть не могут. Таким образом, неравенство $\sqrt[10]{11 - 4x} \leqslant 0$ равносильно уравнению $\sqrt[10]{11 - 4x} = 0$, откуда $11 - 4x = 0$, т. е. $x = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$.

Ответ: $2\frac{3}{4}$.

г) Поскольку обе части неравенства $\sqrt[6]{21 - 2x} \leqslant 1$ принимают неотрицательные значения при всех значениях x, при которых выражение $\sqrt[6]{21 - 2x}$ имеет смысл, то по свойствам арифметического корня четной степени данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 21 - 2x \geqslant 0, \\ 21 - 2x \leqslant 1. \end{cases}$$

Решая эту систему неравенств, получаем:

$$\begin{cases} 2x \leqslant 21, \\ 2x \geqslant 21 - 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leqslant \frac{21}{2}, \\ x \geqslant 10; \end{cases}$$

$$10 \leqslant x \leqslant 10{,}5.$$

Ответ: $[10; 10{,}5]$.

?

1. Назовите свойства корня n-й степени, которые одинаково формулируются как для четного, так и нечетного значения n.
2. Назовите свойства корня n-й степени, которые по-разному формулируются для четных и нечетных значений n.

Упражнения

Вычислите (2.116—2.117).

2.116. 1) $\sqrt{9^5}-\sqrt{81}-0{,}5^{-2}$;

2) $\sqrt{25^3}-\sqrt[4]{81^3}+\sqrt{\left(\frac{1}{16}\right)^{-1}}$;

3) $\sqrt{9^3}+\sqrt[3]{27^2}-\sqrt[4]{\left(\frac{1}{16}\right)^{-3}}$;

4) $\sqrt[4]{16^5}+\sqrt[3]{27^5}-\sqrt{\left(\frac{1}{9}\right)^{-1}}$.

2.117. 1) $\sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[6]{4}\cdot\sqrt[3]{18}$; 2) $\sqrt[4]{10}\cdot\sqrt[4]{40}\cdot\sqrt{5}$;

3) $\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{0{,}25}$; 4) $\sqrt[3]{12}\cdot\sqrt[3]{6^2}\cdot\sqrt[3]{0{,}5}$;

5) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt[3]{7^2}\cdot\sqrt{8}}\cdot\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{7^5}}{\sqrt[6]{8^{-1}}}$; 6) $\frac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt[6]{9}\cdot\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5^3}\cdot\sqrt[12]{8}}{\sqrt[3]{9}}$;

7) $\left(\sqrt[6]{\sqrt[5]{27^2}\cdot\sqrt[5]{2}\cdot 2}\right)^5$; 8) $\left(\sqrt[3]{\sqrt{27}\cdot\sqrt[4]{9^{-3}}}\right)^4$.

Упростите выражение (2.118—2.121).

2.118. 1) $\sqrt[3]{m}\cdot\sqrt[3]{n^5}\cdot\sqrt[6]{m}\cdot\sqrt[6]{n^{-1}}$;

2) $\sqrt[4]{m^3}\cdot\sqrt[24]{n^5}:\left(\sqrt[24]{m^5}\cdot\sqrt[8]{n^{-1}}\right)$;

3) $\sqrt[6]{m^5}\cdot\sqrt[12]{n^7}\cdot\sqrt[4]{m^{-3}}\cdot\sqrt[3]{n^{-2}}$;

4) $\sqrt{m^{-9}}\cdot\sqrt[12]{n}\cdot\sqrt[4]{m^{19}}\cdot\sqrt[3]{n^{-1}}$.

2.119. 1) $\sqrt{\sqrt[4]{a^{10}b^2c^8}}$; 2) $\sqrt[3]{\sqrt[10]{a^{10}b^5c^{15}}}$;

3) $\sqrt{a^8\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a}}}$; 4) $\sqrt[4]{a^2\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}$;

5) $\sqrt{\sqrt[3]{\frac{a^2}{b}\sqrt{\frac{b}{a}}}}$; 6) $\sqrt[3]{\frac{a}{b}\sqrt{\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^6}{a}}}}$;

7) $\sqrt[4]{2a\sqrt[3]{2a^2b\cdot 3b\sqrt{3ab^3}}}$;

8) $\sqrt[5]{2a^2\sqrt{3ab\cdot 2b\sqrt{2a^3b}}}$.

2.120. 1) $\sqrt{a+6\sqrt[4]{a^2b}+9\sqrt{b}}$;

2) $\sqrt{4\sqrt{a}-20\sqrt[4]{ab^2}+25b}$;

3) $\sqrt{a^3+2ab\sqrt{ab}+b^3}$;

4) $\sqrt{2a-10\sqrt[6]{8a^3b^2}+25\sqrt[3]{b^2}}$;

5) $5a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}-2\sqrt{a^3\sqrt[4]{a^8}}+3\sqrt{a^5\cdot\sqrt{a^{-5}}}-$
$-4a^2\sqrt[4]{\left(a\sqrt{\frac{1}{a}}\right)^{-1}}$;

6) $a\sqrt{a\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}+3a^3\sqrt{a^{-3}\sqrt{a}}-2a\sqrt[3]{a^2\sqrt[4]{a}}+$
$+4a\sqrt[3]{a^2\sqrt[4]{a}}$.

2.121. 1) $\sqrt{25-10\sqrt[4]{3}+\sqrt{3}}$;

2) $\sqrt{9+6\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}$;

3) $\left(\sqrt[3]{3-\sqrt[4]{5}}-\sqrt[3]{\sqrt[4]{5}-3}\right)\cdot\sqrt[3]{9-2\sqrt[4]{5}+\sqrt{5}}$;

4) $\left(\sqrt[3]{8-3\sqrt{5}}-\sqrt[3]{3\sqrt{5}-8}\right)\cdot\sqrt[3]{1+\frac{3}{8}\sqrt{5}}$;

5) $\left(\sqrt[6]{9-4\sqrt{2}}+\sqrt[3]{\frac{1}{8}-\frac{\sqrt{2}}{4}}\right)\cdot\sqrt[3]{1+2\sqrt{2}}$;

6) $\left(\sqrt[6]{28+6\sqrt{3}}+\sqrt[3]{\frac{1}{27}+\frac{\sqrt{3}}{9}}\right)\cdot\sqrt[3]{1-3\sqrt{3}}$.

2.122. Найдите значение выражения:

1) $\sqrt[3]{\frac{\sqrt{a}\,\sqrt[3]{b^{-1}}}{\sqrt[4]{a^{-1}b}}}\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{\sqrt[3]{a^3}}{\sqrt[3]{b^2}}\right)^4}\cdot\frac{\sqrt[4]{a^{-1}}}{\sqrt[12]{b^{-19}}}$, если $a=0{,}2$, $b=0{,}05$;

2) $\sqrt[4]{\frac{a^{-1}\sqrt{b}}{\sqrt[6]{a^{-2}}\,\sqrt[3]{b^{-1}}}}\cdot\sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt[6]{b}}}\cdot\frac{\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt{\sqrt[7]{a^7}}}$, если $a=27$, $b=\frac{1}{9}$.

Вынесите общий множитель за скобки (2.123—2.124).

2.123. 1) $a+4\sqrt{a}$; 2) $a-8\sqrt{a}$;
3) $\sqrt[3]{a}-a$; 4) $a+\sqrt[6]{a}$;
5) $2\sqrt[7]{a}-6\sqrt[14]{a}$; 6) $5\sqrt[3]{a}+15\sqrt[6]{a}$;
7) $8\sqrt[10]{a}+14\sqrt[5]{a}$; 8) $9\sqrt[9]{a}-12\sqrt[18]{a}$.

2.124. 1) $\sqrt{ab}-\sqrt{ac}$; 2) $\sqrt[3]{mn}+\sqrt[3]{np}$;
3) $\sqrt[5]{m^2n}-\sqrt[5]{mn^2}$; 4) $\sqrt[6]{m^4n^5}+\sqrt[6]{m^5n^4}$;
5) $\sqrt[3]{m^2n}-\sqrt[3]{mp}+\sqrt[3]{m^3k}$;
6) $\sqrt[5]{m^2n^3k^6}+\sqrt[5]{m^3n^2k^7}-\sqrt[5]{m^4n^5k^8}$;
7)* $\sqrt{-a}-\sqrt[3]{-a}$;
8)* $\sqrt[7]{a}-\sqrt[3]{-a}$;
9)* $\sqrt[10]{-a}+\sqrt{-a}-\sqrt[5]{a}$;
10)* $\sqrt[7]{a}-\sqrt{-a}+\sqrt[14]{-a}$.

2.125. Разложите на множители:

1) $5+\sqrt{5}$; 2) $\sqrt{6}-6$; 3) $\sqrt{3}+\sqrt{6}$;
4) $\sqrt[3]{15}-\sqrt[3]{20}$; 5) $\sqrt[5]{21}-\sqrt[5]{12}$; 6) $\sqrt[6]{24}+\sqrt[6]{3}$;
7) $\sqrt[6]{36}+\sqrt[3]{12}$; 8) $\sqrt[9]{125}+\sqrt[3]{15}$; 9) $\sqrt[12]{64}-\sqrt{6}$.

2.126. Упростите выражение:

1) $(2+\sqrt{a})^2-4\sqrt{a}$;
2) $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2+2\sqrt{ab}$;
3) $\sqrt{m}+\sqrt{n}-(\sqrt[4]{m}+\sqrt[4]{n})^2$;
4) $\sqrt{m}-(\sqrt[4]{m}-\sqrt[4]{n})^2+\sqrt{n}$;
5) $(\sqrt[3]{k}+\sqrt[3]{p})^2-(\sqrt[3]{k}-\sqrt[3]{p})^2$;
6) $(\sqrt[6]{k}-\sqrt[6]{p})^2+(\sqrt[6]{k}+\sqrt[6]{p})^2$;
7) $(\sqrt[4]{c}-\sqrt[3]{c})^2+2\sqrt[12]{c^7}$;
8) $(\sqrt[3]{d^2}+4\sqrt[5]{d})^2-8\sqrt[15]{d^{13}}$;

9) $(\sqrt[6]{a}+1)(\sqrt[6]{a}-1)(\sqrt[3]{a}+1)$;
10) $(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})(\sqrt[8]{a}-\sqrt[8]{b})(\sqrt[8]{a}+\sqrt[8]{b})$.

Сократите дробь (2.127—2.128).

2.127. 1) $\frac{m-n}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}$; 2) $\frac{4m-9n}{2\sqrt{m}+3\sqrt{n}}$;
3) $\frac{\sqrt[4]{m}+\sqrt[4]{n}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}$; 4) $\frac{\sqrt{m}-\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n}-\sqrt[4]{m}}$;
5) $\frac{m+2\sqrt{mn}+n}{m-n}$; 6) $\frac{m-n}{\sqrt{m}+2\sqrt[4]{mn}+\sqrt{n}}$;
7) $\frac{\sqrt[3]{m^2}-\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[3]{m}+\sqrt[3]{n}}$; 8) $\frac{\sqrt[6]{m}+\sqrt[6]{n}}{\sqrt[6]{m^2}-\sqrt[6]{n^2}}$.

2.128. 1) $\frac{a+\sqrt[3]{a}}{5a}$; 2) $\frac{\sqrt[4]{a}-a}{6\sqrt[4]{a}}$;
3) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{a^3}}$; 4) $\frac{2\sqrt[3]{a^{-1}}}{\sqrt[3]{a^2}-3\sqrt[3]{a^{-1}}}$.

2.129. Найдите значение выражения:

1) $\frac{\sqrt[6]{m^6}+\sqrt[3]{m}}{\sqrt[6]{m^5}-\sqrt[3]{m}}$ при $m=0{,}01$;
2) $\frac{\sqrt[3]{m^2}}{\sqrt[3]{m^5}+\sqrt[3]{m^2}}$ при $m=3$;
3) $\frac{\sqrt[4]{m^3}+\sqrt{m}\cdot\sqrt[4]{n}}{\sqrt[4]{m}+\sqrt[4]{n}}$ при $m=16$, $n=121$;
4) $\frac{\sqrt[4]{m^5n}+\sqrt[4]{mn^5}}{(\sqrt[4]{mn})^5}$ при $m=14$, $n=35$.

2.130. Найдите значение выражения:

1) $\frac{2\sqrt{n}}{n-4}-\frac{1}{\sqrt{n}-2}$ при $n=64$;
2) $\frac{5}{\sqrt[4]{n}+6}-\frac{5}{\sqrt[4]{n}-6}$ при $n=625$.

Упростите выражение (2.131—2.133).

2.131. 1) $\left(\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n^3}}{n+2\sqrt{n}+1}-\sqrt{n}\right):\frac{1-\sqrt{n^{-1}}}{\sqrt{n}}$;

2) $\left(\frac{2+2\sqrt{n}}{\sqrt{n^3}-\sqrt{n}}+\sqrt{n^{-1}}\right):\frac{\sqrt{n}}{1-2\sqrt{n}+n}$;

3) $\left(\frac{\sqrt[3]{n^2}-1}{\sqrt[3]{n^2}-\sqrt[3]{n}}+\sqrt[3]{n^{-2}}\right)^{-1}:\frac{1-\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n}}$;

4) $\frac{\sqrt[3]{m}\,(m-4n)}{\sqrt{m}+2\sqrt{n}}\cdot\left(\frac{\sqrt{m}-2\sqrt{n}}{\sqrt[3]{m}}\right)^{-1}-\sqrt[3]{m^2}$.

2.132. 1) $\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}$; 2) $\left(\frac{\sqrt{a}}{b-\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{b}}{a-\sqrt{ab}}\right)\cdot\frac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{b-a}$

3) $\left(\frac{\sqrt[4]{m}}{\sqrt[4]{m^3}-\sqrt[4]{m}}-\frac{\sqrt[4]{m^3}}{m-\sqrt{m}}\right):\left(\sqrt[4]{m}+1\right)^{-1}$;

4) $\frac{\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)^2+\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)^2}{2(a-b)}:\left(\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3}\right)^{-1}-3\sqrt{ab}$.

2.133. 1) $\left(\sqrt{0,25m^2\sqrt{\frac{m}{n}}}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{m}{2\sqrt{m}}\cdot\frac{m}{2\sqrt{n}}:\left(\sqrt[3]{m^2n^{-1}}\cdot m^{-1}\sqrt{n}\right)^6\right)$;

2)* $\left(\sqrt{\frac{(1-m)\sqrt[3]{1+m}}{m}}\cdot\sqrt[3]{\frac{3m^2}{4+4m^2-8m}}\right)^{-1}:\sqrt[3]{\frac{3m\sqrt{m}}{2\sqrt{1-m^2}}}$.

2.134. Освободитесь от иррациональности в знаменателе:

1) $\frac{1}{\sqrt[3]{\sqrt{5}+\sqrt{3}}}$; 2) $\frac{15}{\sqrt[4]{7-2\sqrt{6}}}$;

3) $\frac{1-a}{\sqrt[3]{1-\sqrt{a}}}$; 4) $\frac{1-a}{\sqrt[3]{1+\sqrt{a}}}$;

5)* $\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}}}$; 6) $\frac{1}{\sqrt[3]{\sqrt{2}-\sqrt[4]{3}}}$.

Решите уравнение (2.135—2.136).

2.135. 1) $\sqrt[3]{\sqrt[6]{x^6}}=1$; 2) $\sqrt[5]{\sqrt[8]{x^8}}=1$;

3) $\sqrt{\sqrt[3]{x^3}}=2$; 4) $\sqrt[4]{\sqrt[5]{x^5}}=2$;

5) $\sqrt[9]{\sqrt[8]{(x-2)^8}}=1$; 6) $\sqrt[13]{\sqrt[6]{(4-x)^6}}=1$;

7) $\sqrt[3]{\sqrt[10]{(2x-5)^{10}}}=2$; 8) $\sqrt[3]{\sqrt[12]{(8-5x)^{12}}}=3$.

2.136. 1) $\frac{\sqrt[8]{-x^9}\cdot\sqrt[8]{-x^{17}}}{\sqrt[4]{-x}\cdot\sqrt[4]{(-x)^4}}=25$;

2) $\frac{\sqrt[10]{-x^{11}}\cdot\sqrt[10]{-x^{21}}}{\sqrt[5]{-x^2}\cdot\sqrt[5]{-x^4}}=49$.

Решите неравенство (2.137—2.141).

2.137. 1) $\sqrt{x-1}>2$; 2) $\sqrt{x+2}>3$; 3) $\sqrt[4]{x-1}<2$;

4) $\sqrt[3]{x+2}<-3$; 5) $\sqrt[3]{x-1}>-2$; 6) $\sqrt[3]{x+2}>-3$;

7) $\sqrt[3]{x-1}<-2$; 8) $\sqrt[4]{x+2}<3$; 9) $\sqrt[3]{x-1}<3$.

2.138. 1) $\sqrt{x+2}>\sqrt{x-1}$; 2) $\sqrt{x-2}>\sqrt{3-x}$;

3) $\sqrt[3]{x+3}>\sqrt[3]{1-x}$; 4) $\sqrt[5]{5x+7}<\sqrt[5]{2-3x}$;

5) $\sqrt[7]{3-7x}\geqslant\sqrt[7]{6x-8}$; 6) $\sqrt[9]{5-2x}\leqslant\sqrt[9]{3x-9}$;

7) $\sqrt[4]{5-x}\leqslant\sqrt[4]{x+1}$; 8) $\sqrt[6]{8-x}\geqslant\sqrt[6]{x+2}$.

2.139. 1) $\sqrt[7]{x^2}>0$; 2) $\sqrt[4]{x^2}<0$; 3) $\sqrt[5]{x^2}<0$;

4) $\sqrt[8]{x^2}>-9$; 5) $\sqrt[9]{x^2}\geqslant0$; 6) $\sqrt[3]{x^2}\leqslant0$;

7) $\sqrt[4]{x^2-9}\leqslant-1$; 8) $\sqrt[6]{x^4-16}<-5$;

9) $\sqrt[8]{x^2-8}\leqslant0$; 10) $\sqrt[10]{x^4-32}\leqslant0$.

2.140. 1) $\sqrt[3]{x^2+2x-2}<2$; 2) $\sqrt[4]{x^2+x+1}<1$;

3) $\sqrt{11+6x-5x^2}>-1$; 4) $\sqrt{-x^2-3x+4}>-2$;

5) $\sqrt[4]{x^2-6x+9}\geqslant4$; 6) $\sqrt[5]{x^2+14x+49}\leqslant1$.

2.141. 1) $\sqrt[7]{\frac{1}{3x-8}}>1$; 2) $\sqrt[9]{\frac{1}{5x-6}}<1$;

3) $\sqrt[3]{\frac{9}{6-x}}\leqslant2$; 4) $\sqrt[5]{\frac{8}{4-7x}}\geqslant2$;

5) $\sqrt[8]{\frac{(x-1)(3-x)}{x^2-4}}>0$; 6) $\sqrt[10]{\frac{(2x-8)(x^2-25)}{7-x}}\geqslant0$.

▲ 2.7. Функция $y = \sqrt[n]{x}$, $n \in N$, $n \geqslant 2$

В 9-м классе мы изучали функцию $y = \sqrt{x}$. Она является частным случаем функции $y = \sqrt[n]{x}$, где n — натуральное число больше 1.

Рассмотрим функцию $y = \sqrt[n]{x}$ при n четном и при n нечетном.

1. Функция $y = \sqrt[n]{x}$, где n — четное натуральное число

Естественная область определения выражения $\sqrt[n]{x}$ — множество всех неотрицательных действительных чисел, т. е. промежуток $[0; +\infty)$. Это и есть *область определения функции* $y = \sqrt[n]{x}$ *при четном* n.

Графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = \sqrt[4]{x}$ изображены на рисунке 58.

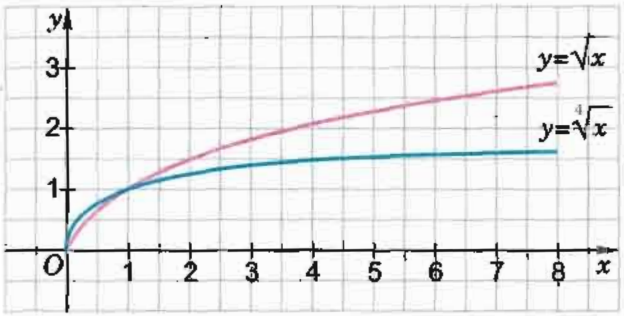


Рис. 58

Назовем ***свойства функции*** $y = \sqrt[n]{x}$, ***где*** n ***— четное натуральное число*** (они те же, что и у функции $y = \sqrt{x}$, и устанавливаются так же, как свойства этой функции).

Теорема (о свойствах функции $y = \sqrt[n]{x}$, где n — четное число.

1) Областью определения функции $y = \sqrt[n]{x}$ (n — четное) является множество $[0; +\infty)$.

2) Множеством значений функции $y = \sqrt[n]{x}$ (n — четное) является множество $[0; +\infty)$.

3) Значение $y = 0$ является наименьшим, а наибольшего значения функция $y = \sqrt[n]{x}$ (n — четное) не имеет.

4) График функции $y = \sqrt[n]{x}$ (n — четное) имеет с осями координат единственную общую точку $(0; 0)$ — начало координат.

5) Значение аргумента $x = 0$ является нулем функции $y = \sqrt[n]{x}$ (n — четное).

6) Функция $y = \sqrt[n]{x}$ (n — четное) принимает положительные значения ($y > 0$) на промежутке $(0; +\infty)$, т. е. ее график расположен в I координатном угле.

7) Функция $y = \sqrt[n]{x}$ (n — четное) не является ни четной, ни нечетной.

8) Функция $y = \sqrt[n]{x}$ (n — четное) — возрастающая на области определения.

Заметим, что функция $y = \sqrt[n]{x}$, где n — четное натуральное число, *не является четной* и *не является нечетной*, так как ее область определения содержит лишь неотрицательные числа, а значит, несимметрична относительно начала координат, соответственно, не является симметричным и ее график (рис. 59).

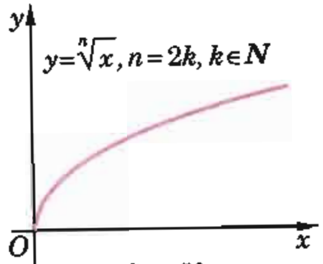


Рис. 59

2. Функция $y = \sqrt[n]{x}$, где n — нечетное натуральное число больше 1

Естественная область определения выражения $\sqrt[n]{x}$ — множество всех действительных чисел, т. е. промежуток $(-\infty; +\infty)$. Это и есть область определения функции $y = \sqrt[n]{x}$ при нечетном n. Прежде всего заметим, что

функция $y = \sqrt[n]{x}$, где $n = 2k + 1$, $k \in N$, является нечетной.

Доказательство. Пусть значения аргумента равны a и $-a$, тогда им соответствуют значения функции $\sqrt[n]{a}$ и $\sqrt[n]{-a}$; но $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$. Таким образом, точки $(a;\ \sqrt[n]{a})$ и $(-a;\ -\sqrt[n]{a})$ принадлежат графику функции $y = \sqrt[n]{x}$; это означает, что график симметричен относительно начала координат, т. е. функция $y = \sqrt[n]{x}$ (n — нечетное натуральное число) — нечетная. ⊠

Так как график функции $y = \sqrt[n]{x}$ симметричен относительно начала координат, то для его изображения достаточно сначала получить график функции $y = \sqrt[n]{x}$ на промежутке $[0;\ +\infty)$ (он получается так же, как и при четном n), а затем эту линию отобразить симметрично относительно начала координат.

Графики функций $y = \sqrt[3]{x}$ и $y = \sqrt[5]{x}$ изображены на рисунке 60.

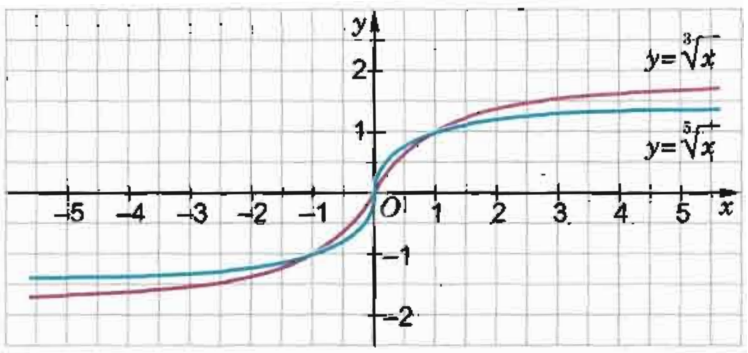


Рис. 60

Назовем ***свойства функции*** $y = \sqrt[n]{x}$, ***где*** n ***— нечетное натуральное число больше 1*** (на промежутке $[0;\ +\infty)$ свойства функции те же, что и при четном n, а на промежутке $(-\infty;\ 0]$ формулировки свойств легко получаются вследствие симметрии графика функции относительно начала координат).

Теорема (о свойствах функции $y = \sqrt[n]{x}$, где n — нечетное натуральное число).

1) Областью определения функции $y = \sqrt[n]{x}$ (n — нечетное) является множество действительных чисел $\boldsymbol{R}$.

2) Множеством значений функции $y = \sqrt[n]{x}$ (n — нечетное) является множество действительных чисел $\boldsymbol{R}$.

3) Наименьшего и наибольшего значений функция $y = \sqrt[n]{x}$ (n — нечетное) не имеет.

4) График функции $y = \sqrt[n]{x}$ (n — нечетное) имеет с осями координат единственную общую точку $(0;\ 0)$ — начало координат.

5) Значение аргумента $x = 0$ является нулем функции $y = \sqrt[n]{x}$ (n — нечетное).

6) Функция $y = \sqrt[n]{x}$ (n — нечетное) принимает отрицательные значения ($y < 0$) на промежутке $(-\infty;\ 0)$ и положительные значения ($y > 0$) — на промежутке $(0;\ +\infty)$, т. е. график функции расположен в I и III координатных углах.

7) Функция $y = \sqrt[n]{x}$ (n — нечетное) является нечетной.

8) Функция $y = \sqrt[n]{x}$ (n — нечетное) возрастающая на области определения.

Пример 1. Указать область определения и множество значений функции:

а) $y = \sqrt[9]{\dfrac{3-x}{x^2-9}}$; б) $y = \sqrt[12]{12-4x} + \sqrt[3]{5-x}$.

Решение. а) Корень нечетной степени определен при любых значениях подкоренного выражения, но подкоренное выражение $\dfrac{3-x}{x^2-9}$ не имеет смысла при $x^2 - 9 = 0$, т. е. при $x = 3$ и при $x = -3$.

Таким образом, естественная область определения выражения $\sqrt[9]{\dfrac{3-x}{x^2-9}}$ — все значения $x \neq \pm 3$, т. е. область определения функции $D = (-\infty;\ -3) \cup (-3;\ 3) \cup (3;\ +\infty)$.

Поскольку $\sqrt[9]{\dfrac{3-x}{x^2-9}} = \sqrt[9]{\dfrac{3-x}{(x-3)(x+3)}} = \sqrt[9]{\dfrac{-1}{x+3}} = \dfrac{-1}{\sqrt[9]{x+3}}$, то $y \neq 0$. Покажем, что функция $y = \dfrac{-1}{\sqrt[9]{x+3}}$ может принимать любое значение $c \neq 0$, т. е. что уравнение $y = c$ при $c \neq 0$ имеет решение:

$$\frac{-1}{\sqrt[9]{x+3}} = c,$$

$$\sqrt[9]{x+3} = \frac{-1}{c},$$

$$x + 3 = \left(\frac{-1}{c}\right)^9, \text{ откуда } x = \frac{-1}{c^9} - 3.$$

Таким образом, множество значений функции
$$E = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty).$$

Ответ: $D = (-\infty;\ -3) \cup (-3;\ 3) \cup (3;\ +\infty)$;
$E = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$.

б) Поскольку корень нечетной степени существует из любого числа, а корень четной степени — только из неотрицательного, то естественную область определения выражения $\sqrt[12]{12-4x} + \sqrt[3]{5-x}$ находим из неравенства $12 - 4x \geqslant 0$, откуда получаем $x \leqslant 3$.

Таким образом, область определения функции $D = (-\infty;\ 3]$.

Поскольку функции $f(x) = 12 - 4x$ и $g(x) = 5 - x$ убывающие, то будут убывающими и функции $f_1(x) = \sqrt[12]{12-4x}$, $g_1(x) = \sqrt[3]{5-x}$, а также функция $h(x) = \sqrt[12]{12-4x} + \sqrt[3]{5-x}$.

Поэтому данная функция $y = h(x)$ достигает наименьшего значения при $x = 3$:

$$y_{наим} = h(3) = \sqrt[12]{12-4\cdot 3} + \sqrt[3]{5-3} = 0 + \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2}.$$

Наибольшего значения функция не имеет.

Таким образом, множество значений функции
$$E = \left[\sqrt[3]{2};\ +\infty\right).$$

Ответ: $D = (-\infty;\ 3]$; $E = \left[\sqrt[3]{2};\ +\infty\right)$.

Пример 2. Указать координаты точек пересечения с осями Ox и Oy графика функции $y = \sqrt[5]{4-x} - 3$.

Решение. Пусть A — точка пересечения графика данной функции с осью Ox. Тогда ее ордината равна нулю и абсцисса удовлетворяет уравнению

$$0 = \sqrt[5]{4-x} - 3.$$

Решив его, получим $x = -239$.

Пусть B — точка пересечения графика данной функции с осью Oy. Тогда ее абсцисса равна нулю и ордината удовлетворяет уравнению

$$y = \sqrt[5]{4-0} - 3,$$

откуда $y = \sqrt[5]{4} - 3$.

Ответ: $A(-239;\ 0)$; $B(0;\ \sqrt[5]{4} - 3)$.

Чтобы судить о свойствах функции по ее графику, совсем необязательно изображать этот график, соблюдая масштаб. Часто бывает достаточно ограничиться схематичным изображением.

Пример 3. Изобразить схематично график функции:

а) $y = \sqrt[8]{x-3} + 20$; б) $y = \sqrt[5]{x+9} - 17$;

Решение. а) Сначала изобразим график функции $y = \sqrt[8]{x}$ (на рисунке 61 он изображен синей линией), а затем эту кривую сдвинем на 3 единицы вправо вдоль оси Ox и на 20 единиц вверх вдоль оси Oy. График функции $y = \sqrt[8]{x-3} + 20$ выделен на рисунке красной линией. По такому схематичному изображению видно, что функция не имеет точек пересечения с осями Ox и Oy, принимает только положительные значения, является возрастающей. Но по нему (без точного масштаба) мы даже приближенно не можем указать значения функции в точках $x \neq 3$.

б) На рисунке 62 схематично изображен график функции $y = \sqrt[5]{x+9} - 17$; поясните, как его получить из графика функции $y = \sqrt[5]{x}$. Какие свойства функции можно «увидеть»

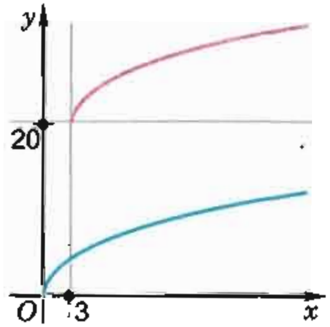


Рис. 61

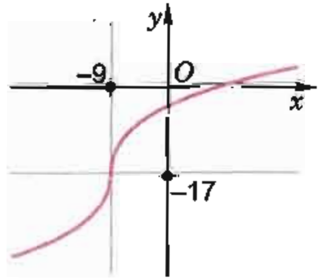


Рис. 62

на этом рисунке? Можно ли по этому рисунку без дополнительных вычислений указать координаты точек пересечения графика функции с осями Ox и Oy? Чем отличается схематичное изображение графика функции от изображения графика этой же функции в масштабе?

Пример 4. Имеет ли корни уравнение

$$\sqrt[5]{x+9} = 17 - (x+5)^2?$$

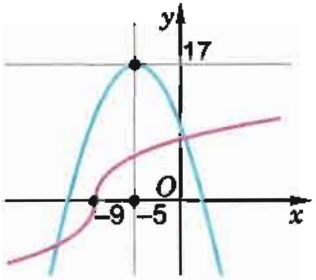


Рис. 63

Решение. Изобразив схематично в одной системе координат графики функций $y = \sqrt[5]{x+9}$ и $y = 17 - (x+5)^2$ (рис. 63), мы можем утверждать, что уравнение имеет два корня.

Пример 5. Указать нули функции и промежутки ее знакопостоянства:

$$y = \sqrt[6]{21-2x} - 1.$$

Решение. Чтобы найти нули функции, решим уравнение $y = 0$, т. е. $\sqrt[6]{21-2x} - 1 = 0$. Получим

$$21 - 2x = 1, \text{ т. е. } x = 10.$$

Чтобы найти промежутки знакопостоянства, надо решить неравенства $y < 0$ и $y > 0$, т. е.

$$\sqrt[6]{21-2x} - 1 < 0 \text{ и } \sqrt[6]{21-2x} - 1 > 0.$$

Решение первого неравенства — промежуток $(10; 10{,}5]$ (см. решение примера 5 г) в п. 2.6).

Решениями второго неравенства являются все точки области определения функции, в которых значения y отличаются от нуля и не являются отрицательными. Поскольку область определения функции — это промежуток $(-\infty; 10{,}5]$ (поясните почему), то решениями второго неравенства будут все числа из промежутка $(-\infty; 10)$.

Ответ: $y = 0$ при $x = 0$;
$y < 0$ при любом $x \in (10; 10{,}5]$;
$y > 0$ при любом $x \in (-\infty; 10)$.

?

1. Какими свойствами обладает функция $y = \sqrt[n]{x}$, где n — четное натуральное число? Изобразите схематично ее график.
2. Какими свойствами обладает функция $y = \sqrt[n]{x}$, где n — нечетное натуральное число, $n > 1$? Изобразите схематично график этой функции.
3. Дайте определение:
   а) нуля функции;
   б) четной (нечетной) функции;
   в) возрастающей (убывающей) на промежутке функции;
   г) промежутка знакопостоянства функции;
   д) наименьшего (наибольшего) значения функции.

Упражнения

2.142. Найдите с помощью изображения графика функции $y = \sqrt[6]{x}$ (рис. 64) приближенное значение выражения (с точностью до 0,1):

1) $\sqrt[6]{1{,}5}$; 2) $\sqrt[6]{0{,}7}$; 3) $\sqrt[3]{\sqrt{0{,}9}}$; 4) $\sqrt{\sqrt[3]{1{,}8}}$.

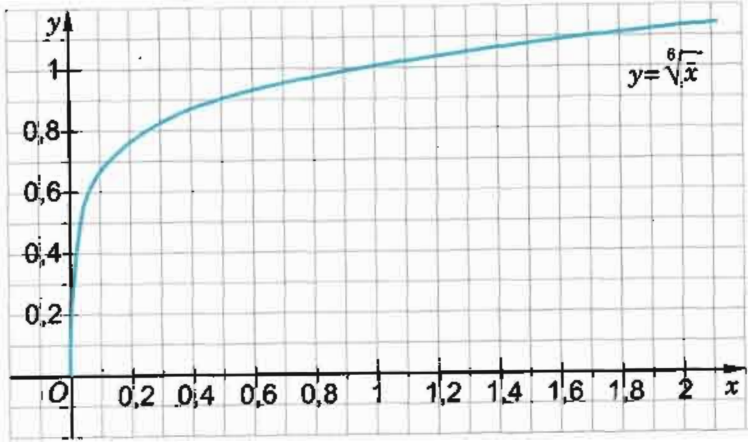


Рис. 64

2.143. Расположите в порядке возрастания числа:

1) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[6]{4}$; 2) $\sqrt{3}$, $\sqrt[6]{18}$, $\sqrt[3]{4}$;

3) $\sqrt[5]{3}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[15]{30}$; 4) $\sqrt[15]{40}$, $\sqrt[5]{4}$, $\sqrt[3]{2}$;

5) $\sqrt[16]{64}$, $\sqrt[4]{4\sqrt{1{,}25}}$, $\sqrt[6]{7^4\sqrt{7}}$; 6) $\sqrt[4]{3}$, $\sqrt[6]{2\sqrt{7}}$, $\sqrt[5]{2^3\sqrt{2}}$.

2.144. Найдите с помощью изображения графика функции $y=\sqrt[7]{x}$ (рис. 65) приближенное значение выражения (с точностью до 0,1):

1) $\sqrt[7]{0,6}$; 2) $\sqrt[7]{0,2}$; 3) $\sqrt[7]{-0,3}$; 4) $\sqrt[7]{-0,7}$

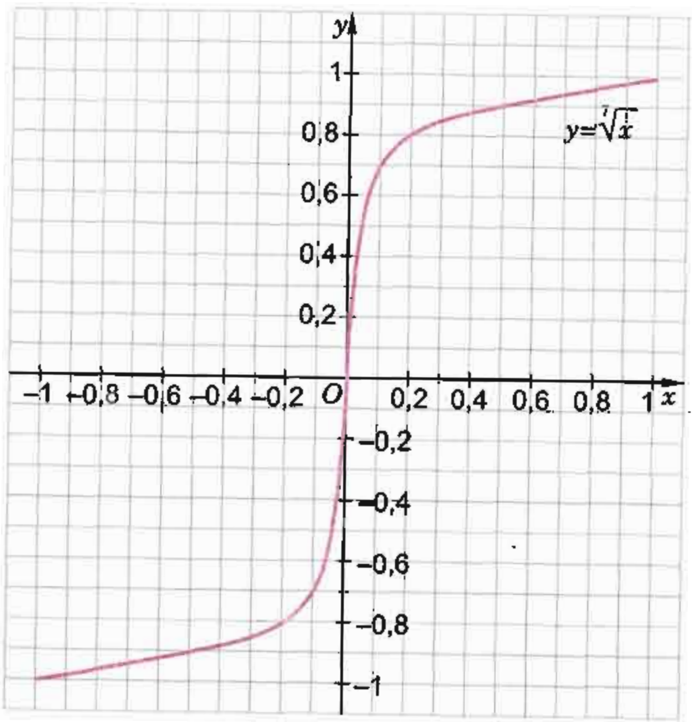


Рис. 65

2.145. Сравните числа:

1) $\sqrt[3]{5}$ и $\sqrt{3}$; 2) $\sqrt[4]{4}$ и $\sqrt{3}$;

3) $\sqrt[5]{\sqrt[4]{101}}$ и $\sqrt[10]{10}$; 4) $\sqrt[4]{5}$ и $\sqrt[8]{7\sqrt{3}}$;

5) $\sqrt{3}$ и $\sqrt[3]{3\sqrt{3}}$; 6) $\sqrt{3\sqrt[3]{2}}$ и $\sqrt[3]{2\sqrt{3}}$.

2.146. Сравните с нулем значение выражения:

1) $-3\sqrt[3]{-19}$; 2) $\sqrt[5]{20}-\sqrt[5]{10}$;

3) $\sqrt[3]{31}-3$; 4) $\sqrt[4]{11,5}-\sqrt[4]{11\frac{5}{7}}$;

5) $\sqrt[5]{-4,6}-\sqrt[5]{-4,16}$; 6) $\sqrt[4]{9,1}-\sqrt[4]{\frac{87}{9}}$;

7) $\frac{\sqrt[3]{6,09}-\sqrt[3]{6,15}}{\sqrt[3]{5}-1}$; 8) $\sqrt[5]{4,75}-\sqrt[5]{\frac{25,71}{6}}$;

9) $\frac{\sqrt[7]{3,198}-\sqrt[7]{3\frac{1}{3}}}{\sqrt[7]{8,451}-2}$.

2.147. Принадлежит ли графику функции $y=\sqrt[6]{x}$ точка:

1) $A(729;\ 3)$; 2) $B(-64;\ -2)$;
3) $C(1;\ -1)$; 4) $P(-4096;\ 4)$;
5) $K\left(\sqrt{2};\ \sqrt[12]{2}\right)$; 6) $M(0,000001;\ 0,1)$?

2.148. Принадлежит ли графику функции $y=\sqrt[5]{x}$ точка:

1) $A(32;\ 2)$; 2) $P(-243;\ -3)$;
3) $K(1;\ -1)$; 4) $B(-1024;\ 4)$;
5) $C\left(7\frac{19}{32};\ 1,5\right)$; 6) $M(-0,00001;\ -0,1)$?

Укажите: а) область определения функции; б) множество значений функции (2.149—2.150).

2.149. 1) $y=\sqrt{x+6}$; 2) $y=\sqrt{x-4}$;
3) $y=\sqrt[4]{x-1}$; 4) $y=\sqrt[4]{x+2}$;
5)* $y=\sqrt[6]{x^2-9}$; 6) $y=\sqrt[8]{25-x^2}$;
7) $y=\sqrt[6]{x-2}+\sqrt[8]{x-3}$; 8) $y=\sqrt{4-2x}+\sqrt[4]{83-x}$.

2.150. 1) $y=\sqrt[3]{\frac{1}{x}}$; 2) $y=\sqrt[5]{\frac{2}{x+3}}$;
3) $y=\sqrt[5]{\frac{x^2+4x+4}{x+2}}$; 4) $y=\sqrt[7]{\frac{5+x}{x^2-25}}$;
5)* $y=\sqrt[9]{\frac{1}{x^2-4x+3}}$; 6)* $y=\sqrt[3]{\frac{4}{x^4-5x^2-36}}$.

Укажите координаты точек пересечения с осями Ox и Oy графика функции (2.151—2.152).

2.151. 1) $y=\sqrt{x}-1$; 2) $y=\sqrt[4]{x+1}$;

3) $y=\sqrt[4]{x+1}-1$; 4) $y=\sqrt[4]{x+2}-3$;

5) $y=1-\sqrt[4]{x^2-1}$; 6) $y=2-2\sqrt[4]{3-x}$.

2.152. 1) $y=\sqrt[3]{x-1}+1$; 2) $y=\sqrt[5]{x+2}-2$;

3) $y=\sqrt[5]{x+4}-1$; 4) $y=3-\sqrt[7]{2-x}$;

5) $y=4-2\sqrt[3]{1-2x}$; 6) $y=5-0{,}5\sqrt[3]{4-2x}$.

Изобразите график функции (схематично) (2.153—2.154).

2.153. 1) $y=\sqrt[4]{x-1}$; 2) $y=\sqrt[4]{x+1}$;

3) $y=\sqrt[4]{x+1}-1$; 4) $y=\sqrt[4]{x-1}+1$;

5) $y=\sqrt[4]{x-1}-1$; 6) $y=\sqrt[4]{x+1}+1$;

7) $y=1-\sqrt[4]{x-1}$; 8) $y=1-\sqrt[4]{x+1}$.

2.154. 1) $y=\sqrt[3]{x+1}$; 2) $y=\sqrt[3]{x-1}$;

3) $y=\sqrt[3]{x-1}+2$; 4) $y=\sqrt[3]{x+1}+2$;

5) $y=\sqrt[3]{x+1}-2$; 6) $y=\sqrt[3]{x-1}-2$;

7) $y=2-\sqrt[3]{x-1}$; 8) $y=2-\sqrt[3]{x+1}$.

2.155. На рисунке 66 изображен график функции. Укажите для нее:

а) область определения;
б) множество значений;
в) промежуток убывания;
г) промежуток возрастания;
д) наибольшее (наименьшее) значение;
е) значения x, при которых $y > 0$;
ж) значения x, при которых $y < 0$.

2.156. Укажите нули функции:

1) $y=\sqrt{x-6}-4$; 2) $y=\sqrt[3]{x+2}+3$;

3) $y=\sqrt[5]{x^2-4x}-\sqrt[5]{6-3x}$; 4) $y=\sqrt[4]{x^2-10}-\sqrt[4]{-3x}$.

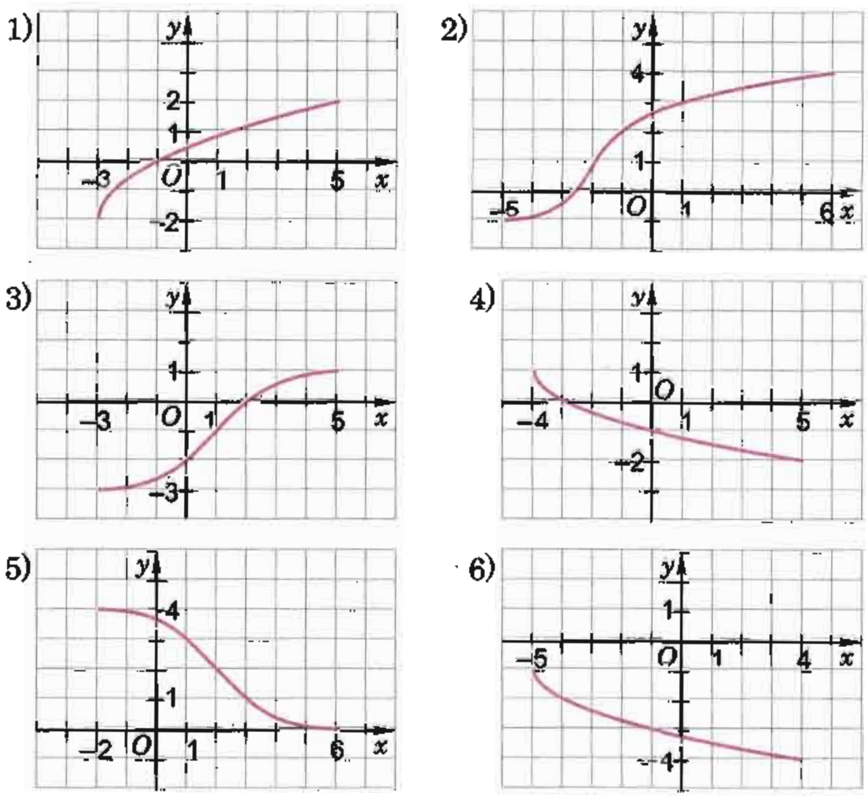


Рис. 66

2.157. Найдите промежутки знакопостоянства функции:

1) $y=\sqrt[4]{x-4}-1$; 2) $y=\sqrt[6]{2x-10}+1$;

3) $y=\sqrt[5]{3x-10}+1$; 4) $y=\sqrt[7]{12-7x}-1$.

2.158. При каких значениях t верно равенство:

1) $\sqrt{t^2}=-t$; 2) $\sqrt[3]{t^3}=t$; 3) $\sqrt[7]{t^7}=|t|$;

4) $\sqrt[8]{t^8}=t$; 5) $\sqrt[9]{t^9}=-t$; 6) $\sqrt[12]{t^{12}}=-t$;

7) $\sqrt[16]{t^{16}}=|t|$; 8) $\sqrt[11]{t^{11}}=t$; 9) $\sqrt{8t^3}=2t\sqrt{2t}$?

2.159. При каких значениях a верно равенство:

1) $(\sqrt[3]{a-1})^3=a-1$; 2) $\sqrt[6]{(a-2)^2}=\sqrt[3]{a-2}$;

3) $\sqrt[a]{2^{2a}} = 4$; 4) $a\sqrt{5} = \sqrt{2a^2}$;

5) $a\sqrt[4]{7} = -\sqrt[4]{7a^4}$; 6) $\sqrt[8]{(a-2)^4} = \sqrt{2-a}$;

7) $\sqrt{a-3}\cdot\sqrt{a+2} = \sqrt{(a-3)(a+2)}$;

8) $\sqrt[4]{(a+5)(a-6)} = \sqrt[4]{-a-5}\cdot\sqrt[4]{6-a}$?

2.160*. Изобразите график функции:

1) $y = \sqrt{-x^2}$; 2) $y = \sqrt{-\sqrt{x}}$;

3) $y = \sqrt{\frac{2}{5}x - x^2 - \frac{1}{25}}$; 4) $y = \sqrt{-|x-1|}$;

5) $y = \sqrt{x - |x|}$; 6) $y = \sqrt{x}\cdot\sqrt{x}$;

7) $y = (\sqrt{x})^4$; 8) $y = (\sqrt[3]{x})^3$.

▲ 2.8. Иррациональные уравнения

Рассмотрим уравнения, в которых неизвестное находится под знаком корня. Уравнения такого вида принято называть ***иррациональными.***

Простейшие иррациональные уравнения мы решали раньше. Например, такие уравнения, как $\sqrt[3]{x-6} = -2$, $\sqrt[4]{5x-3} = 1$ и т. п. Рассмотрим решение некоторых более сложных иррациональных уравнений.

Пример 1. Решить уравнение

$$\sqrt{x+5} = x - 7. \qquad (1)$$

Решение. Подробно объясним решение этого примера (как такие решения оформляются, мы покажем немного позже, решая пример 3).

Способ 1. Пусть x_0 — корень уравнения (1), подставив его в уравнение (1), получим верное числовое равенство

$$\sqrt{x_0+5} = x_0 - 7.$$

По определению арифметического квадратного корня это равенство означает, что

$$x_0 - 7 \geqslant 0 \text{ и } x_0 + 5 = (x_0 - 7)^2,$$

т. е. x_0 является решением системы, состоящей из одного уравнения и одного неравенства:

$$\begin{cases} x - 7 \geqslant 0, \\ x + 5 = (x-7)^2. \end{cases} \qquad (2)$$

Итак, каждое решение уравнения (1) является решением системы (2) и наоборот — каждое решение системы (2) является решением уравнения (1).

В таких случаях говорят, что ***уравнение*** (1) ***и система*** (2) ***равносильны.***

Решим систему (2). Начнем с уравнения

$$x + 5 = (x-7)^2.$$

После преобразований получим равносильное ему уравнение $x^2 - 15x + 44 = 0$, корнями которого являются $x_1 = 4$ и $x_2 = 11$.

Нетрудно убедиться, что из этих корней неравенству

$$x - 7 \geqslant 0$$

удовлетворяет только один корень $x_2 = 11$.

Таким образом, решением системы (2), а следовательно и равносильного ей уравнения (1), является число 11.

Ответ: 11.

Итак, один из подходов к решению иррационального (как и любого другого) уравнения состоит *в замене этого уравнения равносильным ему утверждением.*

Способ 2. Возведя обе части уравнения (1) в квадрат, получим уравнение

$$x + 5 = (x-7)^2. \qquad (3)$$

Заметим, что *каждый корень уравнения* (1) *является корнем уравнения* (3), так как если два числа равны, то их квадраты также равны.

Но корень уравнения (3) *не обязательно является корнем уравнения* (1), так как из равенства квадратов двух чисел не следует равенство самих чисел. Поэтому, *когда мы решим уравнение* (3), *то должны будем обязательно проверить, удовлетворяют ли его корни исходному уравнению* (1).

Уравнение (3) называется следствием из уравнения (1), его еще называют ***уравнением-следствием.***

Решив уравнение (3), получим

$$x_1 = 4, \ x_2 = 11.$$

Проверка. Подставив в уравнение (1) значение $x = 4$, получим

$$\sqrt{4+5} = 4 - 7,$$

т. е. $\sqrt{9} = -3$ — неверное числовое равенство; значит, 4 не является корнем уравнения (1).

Подставив в уравнение (1) значение $x = 11$, получим

$$\sqrt{11+5} = 11 - 7,$$

т. е. $\sqrt{16} = 4$ — верное числовое равенство; значит, 11 — корень уравнения (1).

Итак, еще один из подходов к решению иррационального (как и любого другого) уравнения состоит в следующем:

а) *сначала исходное уравнение заменяют уравнением-следствием и решают его;*

б) *корни уравнения-следствия проверяют по условию исходного уравнения.*

Решая пример 1 вторым способом, мы фактически пользовались определением уравнения-следствия.

Определение. Если каждый корень уравнения

$$f(x) = 0 \tag{4}$$

является корнем уравнения

$$g(x) = 0, \tag{5}$$

то уравнение (5) называется ***следствием уравнения*** (4).

Аналогично понятие следствия определяется для неравенств, систем уравнений и неравенств и т. д.

Пример 2. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{7 - x^3} = 1 - x.$$

Решение. *Способ 1.* По определению корня 3-й степени уравнение

$$7 - x^3 = (1 - x)^3 \tag{6}$$

равносильно данному. Решим уравнение (6):

$$7 - x^3 = 1 - 3x + 3x^2 - x^3;$$
$$3x^2 - 3x - 6 = 0;$$
$$x^2 - x - 2 = 0;$$
$$x_1 = -1; \ x_2 = 2.$$

Ответ: -1; 2.

Способ 2. Можно получить уравнение (6) из данного уравнения $\sqrt[3]{7 - x^3} = 1 - x$ и не по определению корня 3-й степени, а возведя обе части уравнения в 3-ю (нечетную) степень.

Проверка решений уравнения (6) *по условию исходного уравнения и в этом случае не является обязательной, поскольку кубы двух чисел равны тогда и только тогда, когда сами эти числа равны. Таким образом, при возведении обеих частей исходного уравнения в 3-ю степень получается равносильное ему уравнение.*

Пример 3. Решить уравнение

$$\sqrt{2x - 1} = 4 - 3x. \tag{7}$$

Решение. *Способ 1.* По определению арифметического квадратного корня имеем равносильную уравнению (7) систему

$$\begin{cases} 4 - 3x \geqslant 0, \\ 2x - 1 = (4 - 3x)^2. \end{cases} \tag{8}$$

Решив уравнение из этой системы, получим:

$$9x^2 - 26x + 17 = 0,$$

откуда $x_1 = 1$, $x_2 = 1\frac{8}{9}$.

Решив неравенство из системы (8), получим:

$$x \leqslant 1\frac{1}{3}.$$

Из двух найденных корней этому условию удовлетворяет лишь корень $x_1 = 1$.

Ответ: 1.

Записать решение этого примера можно так:

$$\sqrt{2x-1} = 4-3x;$$

$$\begin{cases} 4-3x \geqslant 0, \\ 2x-1 = (4-3x)^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x \leqslant 4, \\ 9x^2 - 26x + 17 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leqslant 1\frac{1}{3}, \\ \left(x = 1 \text{ или } x = 1\frac{8}{9}\right); \end{cases}$$

$$x = 1.$$

Ответ: 1.

Способ 2. Возведем обе части уравнения (7) в квадрат и решим полученное уравнение:

$$2x-1 = (4-3x)^2,$$
$$9x^2 - 26x + 17 = 0,$$
$$x_1 = 1;\ x_2 = 1\frac{8}{9}.$$

Проверка. Подставив $x = 1$ в уравнение (7), получим

$$\sqrt{2\cdot 1 - 1} = 4 - 3\cdot 1.$$

Это верное числовое равенство, значит, $x_1 = 1$ — корень уравнения (7).

Подставив $x = 1\frac{8}{9}$ в уравнение (7), получим

$$\sqrt{2\cdot 1\frac{8}{9} - 1} = 4 - 3\cdot\frac{17}{9}.$$

Это неверное числовое равенство, так как $4 - \frac{17}{3} < 0$, а значение арифметического квадратного корня не может быть отрицательным, т. е. $x = 1\frac{8}{9}$ не является корнем уравнения (7).

Ответ: 1.

Решение примера способом 2 можно записать и так:

$$\sqrt{2x-1} = 4-3x;$$
$$2x-1 = (4-3x)^2;$$
$$9x^2 - 26x + 17 = 0;$$
$$\left(x = 1 \text{ или } x = 1\frac{8}{9}\right).$$

Проверка показывает, что исходному уравнению удовлетворяет только $x = 1$.

Ответ: 1.

Сравните решения примеров 2 и 3 (способ 2). Чем и почему отличаются эти решения?

Решая пример 3, ученик Борис записал равносильную уравнению (7) систему так:

$$\begin{cases} 2x-1 \geqslant 0, \\ 4-3x \geqslant 0, \\ 2x-1 = (4-3x)^2. \end{cases}$$

Одноклассница Галя сказала, что первое неравенство в системе можно не записывать, так как это условие, очевидно, выполняется из последней строчки системы. Учитель подтвердил, что Борис записал в своей системе условие $2x-1 \geqslant 0$ дважды.

Поясните, почему из уравнения

$$2x-1 = (4-3x)^2$$

видно, что условие $2x-1 \geqslant 0$ выполнено.

Пример 4*. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{2x+3} + \sqrt[3]{x+1} = 1.$$

Решение. *Способ 1.* Возведя обе части данного уравнения в куб, получим равносильное ему уравнение

$$(2x+3) + (x+1) + 3\sqrt[3]{2x+3}\cdot\sqrt[3]{x+1}\left(\sqrt[3]{2x+3} + \sqrt[3]{x+1}\right) = 1.$$

Здесь мы использовали формулу куба суммы в виде $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$.

Поскольку по условию $\sqrt[3]{2x+3}+\sqrt[3]{x+1}$ равно 1, то отсюда получаем уравнение-следствие:

$$3x+4+3\sqrt[3]{2x+3}\cdot\sqrt[3]{x+1}\cdot 1=1.$$

Решим это уравнение:

$$3\sqrt[3]{2x+3}\cdot\sqrt[3]{x+1}=-3x-3;$$
$$(2x+3)(x+1)=-(x+1)^3;$$
$$(x+1)(2x+3+(x+1)^2)=0;$$
$$(x+1)(x^2+4x+4)=0;$$
$$(x+1)(x+2)^2=0;$$
$$x=-1 \text{ или } x=-2.$$

Проверка: при $x=-1$ имеем $\sqrt[3]{-2+3}+\sqrt[3]{-1+1}=1$ — верное числовое равенство, значит, число -1 — корень;

при $x=-2$ имеем $\sqrt[3]{-4+3}+\sqrt[3]{-2+1}=1$ — неверное числовое равенство, значит, число -2 не является корнем.

Ответ: -1.

Способ 2. Пусть $\sqrt[3]{2x+3}=a$ и $\sqrt[3]{x+1}=b$, тогда $a^3=2x+3$ и $b^3=x+1$. Для новых переменных получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} a+b=1, \\ a^3-2b^3=1. \end{cases}$$

Подставив во второе уравнение $a=1-b$, получим уравнение относительно b:

$$(1-b)^3-2b^3=1.$$

Решим его:

$$1-3b+3b^2-b^3-2b^3=1;$$
$$-3b(b^2-b+1)=0;$$
$$-3b=0 \text{ или } b^2-b+1=0;$$
$$b=0 \text{ или } \varnothing, \text{ так как } D=1-4<0.$$

Таким образом, имеем $b=0$ и $a=1$, т. е.

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x+1}=0, \\ \sqrt[3]{2x+3}=1, \end{cases}$$

откуда находим $x=-1$.

Ответ: -1.

1. Какие уравнения принято называть иррациональными?
2. Почему уравнение $(ax+b)^2=x+c$ является следствием уравнения $ax+b=\sqrt{x+c}$?
3. Почему после возведения в квадрат (или в любую четную степень) обеих частей уравнения и после решения полученного уравнения его корни необходимо проверять по условию исходного уравнения?
4. Как можно решать иррациональные уравнения (укажите подходы к решению)?

Упражнения

2.161. Равносильны ли уравнения:

1) $\sqrt{7-x}=3$ и $7-x=9$;
2) $\sqrt{x+8}=x$ и $x+8=x^2$;
3) $\sqrt{4-2x}=x^2+1$ и $4-2x=(x^2+1)^2$;
4) $\sqrt{x^2+5x+6}=1-x$ и $x^2+5x+6=(1-x)^2$?

Решите уравнение (2.162—2.166).

2.162. 1) $\sqrt{3x+1}=x-3$; 2) $\sqrt{4x+1}=x-1$;
3) $\sqrt{2x+3}=x$; 4) $\sqrt{6x-5}=x$;
5) $7+x=\sqrt{7-3x}$; 6) $1-x=\sqrt{15+3x}$;
7) $2x+\sqrt{34-5x}=7$; 8) $3x=\sqrt{3-x}-5$.

2.163. 1) $\sqrt{6-4x-x^2}=x+4$;
2) $\sqrt{2x^2+5x+3}=x+3$;
3) $x+\sqrt{2x^2+13-14x}=5$;
4) $\sqrt{1+8x+2x^2}-x=3$.

2.164. 1) $\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{2x+6}=x+3$;
2) $\sqrt{x-3}\cdot\sqrt{2x+2}=x+1$;
3) $\dfrac{7x-2}{\sqrt{3x-8}}=3\sqrt{2x+3}$;
4) $\sqrt{4x-3}=\dfrac{3x-1}{\sqrt{3x-5}}$.

2.165. 1) $\sqrt[3]{6x-4}=6-2x$; 2) $\sqrt[3]{3-4x}=2x-3$;
3) $\sqrt[3]{5x+6}=4+3x$; 4) $\sqrt[3]{3x+7}=x+3$.

2.166*. 1) $\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{3x+2}=0$;

2) $\sqrt{x-1}=\sqrt[3]{3x-7}$;

3) $\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{2x+2}=0$;

4) $\sqrt[3]{2-2x}=\sqrt{1-x}$.

2.167. Верно ли, что не имеет корней уравнение:

1) $\sqrt{x+4}+\sqrt{x+8}=0$;
2) $\sqrt{x-1}+\sqrt{x^2-4}=-6$;
3) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}=0$;
4) $\sqrt{x-7}-\sqrt{6-x}=0$?

Решите уравнение (2.168—2.170).

2.168. 1) $x^2-4x=x\sqrt{x+2}$;
2) $x\sqrt{36x+1261}=18x^2-17x$;
3) $(x-3)\sqrt{x^2-5x+4}=2x-6$;
4) $(x-1)\sqrt{x^2-x-6}=6x-6$;
5) $\sqrt{1+x\sqrt{x^2+42}}=x+1$;
6) $\sqrt{9+x\sqrt{5-x}}=x+3$.

2.169. 1) $x^2+3x-18+4\sqrt{x^2+3x-6}=0$;
2) $2x^2+3x+3-5\sqrt{2x^2+3x+9}=0$;
3) $x^2+2x-12+\sqrt{x^2+2x+8}=0$;
4) $2x^2+4x-36+\sqrt{2x^2+4x+6}=0$.

2.170. 1) $\sqrt{|x+1|}=x+1$; 2) $\sqrt{|x-5|}=x-5$;
3) $\sqrt{|2x-7|}=2x-7$; 4) $\sqrt{|3x+1|}=3x+1$;
5) $\sqrt{|x-10|}=x+2$; 6) $\sqrt{|x-16|}=x-4$.

2.171. Решите уравнение относительно x (a — параметр):

1) $\sqrt{x+4}=a-6$; 2) $\sqrt{9-x}=a+2$;
3) $\sqrt{x+a}=\sqrt{8-x}$; 4) $\sqrt{a-x}=\sqrt{4x-1}$;
5) $(4-\sqrt{x})(4+\sqrt{x})=a$; 6) $\frac{a}{\sqrt{x}-1}=\sqrt{x}+1$.

Решите уравнение (2.172—2.177).

2.172. 1) $(x+6)\sqrt[4]{3x^2+17x-16}=0$;

2) $(x+9)\sqrt[6]{5x^2+38x-63}=0$;

3) $(x+5)\sqrt[8]{2x^2+11x-21}=0$;

4) $(x+8)\sqrt[10]{3x^2+20x-32}=0$.

2.173. 1) $(x+1)\sqrt{16x+17}=(x+1)(8x-23)$;
2) $(x-2)\sqrt{15x-24}=(2x-5)(x-2)$;
3) $(x-1)\sqrt{7x+8}=(5x-14)(x-1)$;
4) $(x+2)\sqrt{12x+4}=(3x-7)(x+2)$.

2.174*. 1) $\sqrt[3]{10+x}-\sqrt[3]{1+x}=3$; 2) $\sqrt[3]{9-x}-\sqrt[3]{2-x}=1$;
3) $\sqrt[3]{14-x}+\sqrt[3]{2+x}=4$; 4) $\sqrt[3]{13-x}+\sqrt[3]{3+x}=4$.

2.175*. 1) $\sqrt{\sqrt{x+3}+x+1}=2\sqrt{2x-1}$;
2) $\sqrt{\sqrt{x+4}+14x+15}=2\sqrt{3x+7}$;
3) $\sqrt{\sqrt{x-3}+10x+9}=3\sqrt{x+2}$;
4) $\sqrt{\sqrt{x-3}+6x+29}=3\sqrt{x+2}$.

2.176*. 1) $\sqrt{6-\sqrt[3]{2x+\sqrt{x^2+6x}}}=2$;

2) $\sqrt{2+\sqrt[3]{6x+\sqrt{x^2+3x}}}=2$;

3) $\sqrt{8+\sqrt[3]{3x+\sqrt{5x^2-11x}}}=3$;

4) $\sqrt{27-\sqrt[3]{2x+\sqrt{90x^2-10x}}}=5$.

2.177*. 1) $\sqrt{4x^2+9x+5}-\sqrt{2x^2+x-1}=\sqrt{x^2-1}$;
2) $\sqrt{x^2-x-2}+\sqrt{-x^2+3x+4}=\sqrt{-x^2+5x+6}$;
3) $\sqrt{x^2+6x+8}+\sqrt{x^2+3x+2}=\sqrt{2x^2+13x+18}$;
4) $\sqrt{x^2+3x+2}-\sqrt{2x^2-x-3}=\sqrt{4x^2-3x-7}$.

▲ 2.9. Иррациональные неравенства

Рассмотрим неравенства, в которых неизвестное находится под знаком корня. Неравенства такого вида принято называть *иррациональными*.

Простейшие иррациональные неравенства мы решали раньше. Например, такие, как $\sqrt[4]{x+2} \geqslant 1$, $\sqrt[5]{2x-3} < -2$ и т. п. Рассмотрим теперь решение некоторых более сложных иррациональных неравенств.

Пример 1. Решить неравенство:

а) $\sqrt{3x-5} > 1-x$; б) $\sqrt{3x-5} \leqslant 1-x$.

Решение. а) Естественная область определения выражения $\sqrt{3x-5}$ — промежуток $\left[\frac{5}{3}; +\infty\right)$. При любом значении x из области определения левая часть данного неравенства неотрицательна, а правая — отрицательна.

Ответ: $\left[1\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

б) Воспользовавшись решением неравенства а), легко понять, что неравенство б) не имеет решений (объясните почему).

Ответ: решений нет.

Пример 2. Решить неравенство:

а) $\sqrt{x-1} > x-7$; б) $\sqrt{x-1} \leqslant x-7$.

Решение. а) *Способ 1.* Решим данное неравенство методом интервалов. Этот метод был обоснован для рациональных неравенств, однако его можно использовать и в других случаях, например, при решении иррациональных неравенств.

Неравенство $\sqrt{x-1} > x-7$ равносильно неравенству $\sqrt{x-1} - x + 7 > 0$.

Рассмотрим функцию $y = \sqrt{x-1} - x + 7$. Ее область определения $D = [1; +\infty)$.

Найдем нули этой функции, т. е. корни уравнения $y = 0$:

$$\sqrt{x-1} - x + 7 = 0,$$

$$\sqrt{x-1} = x-7,$$

$$\begin{cases} x-7 \geqslant 0, \\ x-1 = (x-7)^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geqslant 7, \\ x^2 - 15x + 50 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geqslant 7, \\ (x = 5 \text{ або } x = 10); \end{cases} \quad x = 10.$$

Отметим промежутки знакопостоянства рассматриваемой функции на ее области определения D (рис. 67). В ответе укажем те промежутки, где значения функции $y > 0$.

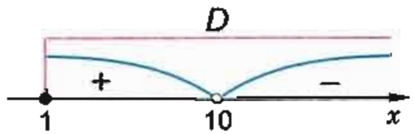


Рис. 67

Ответ: $[1; 10)$.

Способ 2. Неравенство $\sqrt{x-1} > x-7$ равносильно следующему утверждению (поясните почему):

$$\begin{cases} x-7 < 0, \\ x-1 \geqslant 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x-7 \geqslant 0, \\ x-1 > (x-7)^2. \end{cases} \quad (1)$$

Решив первую систему из (1), получим

$$1 \leqslant x < 7.$$

Решая вторую систему из (1), имеем:

$$\begin{cases} x \geqslant 7, \\ x^2 - 15x + 50 < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geqslant 7, \\ 5 < x < 10; \end{cases}$$

$$7 \leqslant x < 10.$$

Объединяя решения обеих систем неравенств из (1), имеем

$$1 \leqslant x < 10.$$

Ответ: $[1; 10)$.

б) *Способ 1.* Если неравенство б) решается после того, как решено неравенство а), то рассуждаем так: решения неравенства б) — это те значения x, которые удовлетворяют условию $x \geqslant 1$ и не являются решениями неравенства а), т. е.

$$x \in [1; +\infty) \text{ и } x \notin [1; 10).$$

Ответ: $[10; +\infty)$.

Заметим, что если неравенство а) решалось методом интервалов, то ответ к неравенству б) легко получить, глядя на рисунок 67 и учитывая включение числа 10 в решения неравенства б) (поясните почему).

А как решается неравенство б), когда неравенство а) не решено?

Способ 2. Неравенство б) можно решить методом интервалов (сделайте это самостоятельно).

Способ 3. Неравенство $\sqrt{x-1} \leqslant x-7$ равносильно следующей системе неравенств (поясните почему):

$$\begin{cases} x-7 \geqslant 0, \\ x-1 \leqslant (x-7)^2, \\ x-1 \geqslant 0. \end{cases}$$

Решим эту систему:

$$\begin{cases} x \geqslant 7, \\ x^2 - 15x + 50 \geqslant 0, \\ x \geqslant 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geqslant 7, \\ (x \leqslant 5 \text{ или } x \geqslant 10); \end{cases}$$

$$x \geqslant 10.$$

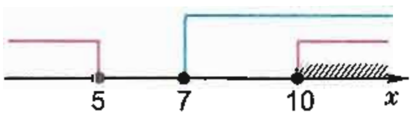


Рис. 68

(Это решение проиллюстрировано рисунком 68.)

Ответ: $[10; +\infty)$.

Пример 3. Решить неравенство

$$\sqrt{\frac{x+5}{3x-1}} \leqslant \sqrt{x+2}. \qquad (2)$$

Решение. Неравенство (2) равносильно системе неравенств (поясните почему):

$$\begin{cases} \dfrac{x+5}{3x-1} \leqslant x+2, \\ \dfrac{x+5}{3x-1} \geqslant 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Решим первое неравенство системы (3) методом интервалов:

$$\frac{x+5}{3x-1} - x - 2 \leqslant 0.$$

Пусть $f(x) = \frac{x+5}{3x-1} - x - 2$, т. е. $f(x) = \frac{-3x^2-4x+7}{3x-1}$.

Область определения функции f — все значения x, кроме $x = \frac{1}{3}$, т. е. $D(f) = \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

Найдем нули функции f из уравнения $f(x) = 0$:

$$\begin{cases} -3x^2 - 4x + 7 = 0, \\ x \neq \frac{1}{3}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(x = 1 \text{ или } x = -\frac{7}{3}\right), \\ x \neq \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Итак, $x_1 = -2\frac{1}{3}$, $x_2 = 1$.

Найдем промежутки знакопостоянства функции f и отметим штриховкой на координатной прямой те из промежутков, где значения $f(x) \leqslant 0$ (рис. 69).

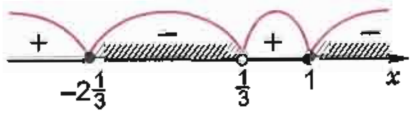


Рис. 69

Решения второго неравенства системы (3) показаны штриховкой на рисунке 70 (поясните, как они получены).

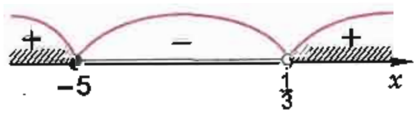


Рис. 70

Изобразим решения обоих неравенств системы (3) на одном рисунке 71 и выделим штриховкой на координатной прямой множество решений системы, т. е. те точки, которые принадлежат каждому решению двух неравенств системы (3).

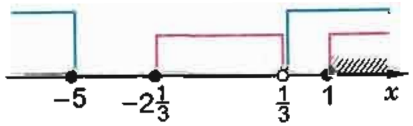


Рис. 71

Ответ: $[1; +\infty)$.

?

1. Какие неравенства называются иррациональными?
2. Как можно решать иррациональное неравенство?
3. Как использовать метод интервалов при решении иррационального неравенства?

Упражнения

Решите неравенство (2.178—2.196).

2.178. 1) $\sqrt{x-3}<x-2$; 2) $\sqrt{x-2}>x$;
3) $\sqrt{24-5x}>-x$; 4) $\sqrt{x+6}>x$;
5) $\sqrt{2x-1}>x-2$; 6) $\sqrt{x+1}<x-1$.

2.179. 1) $2\sqrt{3x-11}<x-1$; 2) $2\sqrt{6x+7}<x+7$;
3) $\sqrt{x+15}\leqslant 5-x$; 4) $\sqrt{14-5x}\leqslant 2+x$.

2.180. 1) $\sqrt{9-x^2}>3x$; 2) $\sqrt{x^2-2x}>4-x$;
3) $\sqrt{x^2+5x+7}<3-x$; 4) $\sqrt{x^2-5x+6}<3-2x$;
5) $\sqrt{x^2-3x-18}<4-x$; 6) $\sqrt{x^2-18x+72}<x-1$.

2.181. 1) $\sqrt{\frac{4x-3}{1+x}}<2$; 2) $\sqrt{\frac{3x-2}{x-1}}<2$;
3) $\sqrt{\frac{x-2}{1-x}}<1$; 4) $\sqrt{\frac{x-3}{2-x}}<4$;
5) $\sqrt{\frac{5x-2}{1-x}}<2$; 6) $\sqrt{\frac{3x-2}{1-x}}<3$.

2.182. 1) $\sqrt{\frac{14x-15}{2x-3}}>\sqrt{x+6}$;
2) $\sqrt{\frac{7x-7}{x-1}}<\sqrt{3x+2}$;
3) $\sqrt{\frac{31x+77}{x+1}}<\sqrt{15(x+1)}$;
4) $\sqrt{\frac{10x+32}{x+4}}>\sqrt{3(x+4)}$.

2.183. 1) $\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+2}<0$; 2) $\frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}-1}>0$; 3) $\frac{4+\sqrt{x}}{6-\sqrt{x}}>0$;
4) $\frac{2-\sqrt{x}}{7+\sqrt{x}}<0$; 5) $\frac{\sqrt{x}-10}{2-\sqrt{x}}\leqslant 0$; 6) $\frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}}\geqslant 0$;
7) $\frac{\sqrt{x}}{7-\sqrt{x}}\geqslant 0$; 8) $\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}}\leqslant 0$.

2.184. 1) $(x-1)\sqrt{x}\leqslant 0$; 2) $(x-2)\sqrt{x}\leqslant 0$;
3) $(x-1)\sqrt{x}\geqslant 0$; 4) $(x-2)\sqrt{x}\geqslant 0$;
5) $(x-1)\sqrt{x}<0$; 6) $(x-2)\sqrt{x}<0$;
7) $(x-1)\sqrt{x}>0$; 8) $(x-2)\sqrt{x}>0$.

2.185. 1) $(x+10)\sqrt{x-4}\leqslant 0$; 2) $(x+8)\sqrt{x-2}\leqslant 0$;
3) $(x-12)\sqrt{x-3}\leqslant 0$; 4) $(x-6)\sqrt{x-1}\leqslant 0$;
5) $(x^2-4)\sqrt{x-1}\leqslant 0$; 6) $(x^2-9)\sqrt{x-3}\leqslant 0$;
7) $(x+2)\sqrt{(4-x)(5-x)}\geqslant 0$;
8) $(x+1)\sqrt{(x+4)(x+7)}\leqslant 0$.

2.186. 1) $\sqrt{2-\sqrt{x}}>1$; 2) $\sqrt{3-\sqrt{x}}>2$;
3) $\sqrt{4+\sqrt{x}}<3$; 4) $\sqrt{6+\sqrt{x}}<1$.

2.187. 1) $\sqrt{\frac{5-x}{x+2}}\cdot\frac{x^2-16}{(x-1)^3}\geqslant 0$; 2) $\sqrt{\frac{6-x}{x+3}}\cdot\frac{x^2-9}{(x-2)^3}\leqslant 0$;
3) $\frac{x^2-4}{(x-3)^2}\cdot\sqrt{\frac{7+x}{x+4}}>0$; 4) $\frac{x^2-25}{(x-4)^2}\cdot\sqrt{\frac{8+x}{x+5}}<0$.

2.188. 1) $\frac{\sqrt{3+2x}}{2x^2-x-1}>0$; 2) $\frac{\sqrt{6+5x}}{5x^2-x-4}<0$;
3) $\frac{\sqrt{5-4x}}{4x^2-x-3}\geqslant 0$; 4) $\frac{\sqrt{4-3x}}{3x^2-x-2}\leqslant 0$.

2.189. 1) $\sqrt{\frac{2x-1}{3x-2}}\leqslant 3$; 2) $\sqrt{\frac{3x-2}{4x-3}}\geqslant 4$;
3) $\sqrt{\frac{4x+3}{5x-4}}<5$; 4) $\sqrt{\frac{x+1}{2x-1}}>2$.

2.190. 1) $\sqrt{\frac{3+2x}{4-x}}\geqslant-\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{\frac{6-5x}{7-x}}\geqslant-\sqrt{11}$;
3) $\sqrt{\frac{5+4x}{6+x}}>-\sqrt{7}$; 4) $\sqrt{\frac{4-3x}{5+x}}>-\sqrt{5}$.

2.191. 1) $\sqrt{x^2-3x-10}<8-x$; 2) $\sqrt{x^2-2x-35}>10-x$;
3) $\sqrt{x^2-x-12}\leqslant 6-x$; 4) $\sqrt{x^2-2x-24}\geqslant 9-x$.

2.192. 1) $x+4\geqslant 2\sqrt{4-x^2}$; 2) $x+9\leqslant 3\sqrt{9-x^2}$;
3) $x+8>2\sqrt{16-x^2}$; 4) $x+16<4\sqrt{16-x^2}$.

2.193. 1) $2\sqrt{1-3x}-\sqrt{5+x}>2$;
2) $\sqrt{19-3x}-2\sqrt{3+x}<3$;
3) $2\sqrt{1-x}-\sqrt{16+5x}\geqslant 3$;
4) $\sqrt{1-5x}-\sqrt{57+2x}\leqslant 4$.

2.194. 1) $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-5}\geqslant\sqrt{x-3}$;

2) $\sqrt{x-4}+\sqrt{x-7}\leqslant\sqrt{x-1}$;

3) $\sqrt{x-3}+\sqrt{x-6}<\sqrt{x+2}$;

4) $\sqrt{x-5}+\sqrt{x-8}>\sqrt{x-6}$.

2.195. 1) $(x+1)\sqrt{x^2+1}>x^2-1$;

2) $(x-3)\sqrt{x^2+3}<x^2-9$;

3) $(x+4)\sqrt{x^2+7}\leqslant x^2-16$;

4) $(x-2)\sqrt{x^2+2}\geqslant x^2-4$.

2.196. 1) $\frac{\sqrt{x+20}}{x}+1\geqslant 0$; 2) $\frac{\sqrt{x+42}}{x}+1\leqslant 0$;

3) $\frac{\sqrt{x+30}}{x}-1<0$; 4) $\frac{\sqrt{x+12}}{x}-1>0$.

Решите систему неравенств (2.197—2.198).

2.197*. 1) $\begin{cases}(x-2)\sqrt{x^2-5{,}5x+6}\geqslant 0,\\(8-x)\sqrt{x^2+0{,}5x-3}\leqslant 0;\end{cases}$

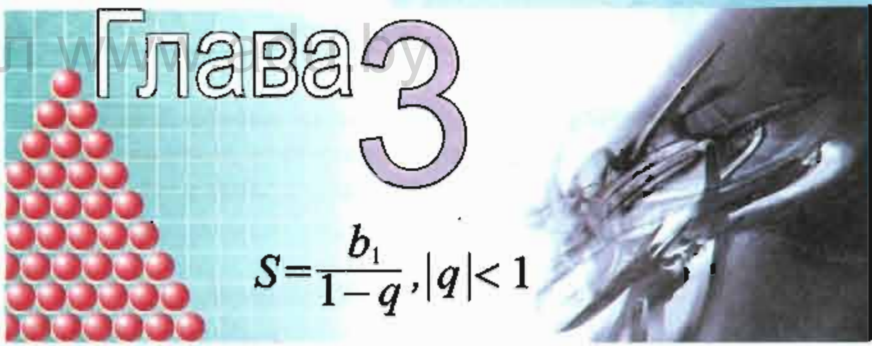
2) $\begin{cases}(x-4)\sqrt{x^2-7{,}5x+11}\geqslant 0,\\(3-x)\sqrt{x^2+0{,}5x-5}\leqslant 0;\end{cases}$

3) $\begin{cases}(x-3)\sqrt{x^2-8{,}5x+15}\geqslant 0,\\(5-x)\sqrt{x^2+0{,}5x-6}\leqslant 0;\end{cases}$

4) $\begin{cases}(x-5)\sqrt{x^2-8{,}5x+13}\geqslant 0,\\(7-x)\sqrt{x^2+0{,}5x-14}\leqslant 0.\end{cases}$

2.198*. 1) $\begin{cases}\sqrt{2x-3}<x,\\\sqrt{3x+7}-\sqrt{1+x}>2;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sqrt{12x-35}>x,\\\sqrt{10-x}+\sqrt{x+3}>5;\end{cases}$

3) $\begin{cases}\sqrt{5x-6}>x,\\\sqrt{x+9}-\sqrt{x-7}>2;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}\sqrt{6-x}>x,\\\sqrt{x+15}+\sqrt{x+3}>6.\end{cases}$



Арифметическая и геометрическая прогрессии

3.1. Числовая последовательность

Рассмотрим сначала два примера.

Пример 1. Каждому натуральному числу n поставим в соответствие число $3n$. Схематически это соответствие можно изобразить так:

$$\begin{array}{cccccc}1, & 2, & 3, & \ldots, & n, & \ldots\,.\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ 3\cdot 1, & 3\cdot 2, & 3\cdot 3, & \ldots, & 3n, & \ldots\,.\end{array}$$

Говорят, что указанным соответствием задана ***последовательность чисел***, или ***числовая последовательность***:

$$3,\quad 6,\quad 9,\quad \ldots,\quad 3n,\quad \ldots\,.$$

Коротко эту числовую последовательность обозначают $(3n)$.

Пример 2. Каждому натуральному числу n поставим в соответствие число $(-1)^n$. Схематически это соответствие можно изобразить так:

$$\begin{array}{ccccccc}1, & 2, & 3, & 4, & \ldots, & n, & \ldots\,.\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ (-1)^1, & (-1)^2, & (-1)^3, & (-1)^4, & \ldots, & (-1)^n, & \ldots\,.\end{array}$$

Говорят, что указанным соответствием задана числовая последовательность

$$-1,\quad 1,\quad -1,\quad 1,\quad \ldots,\quad (-1)^n,\quad \ldots\,.$$

Коротко она обозначается $((-1)^n)$.

Пусть по некоторому закону каждому натуральному числу n ставится в соответствие определенное действительное число a_n. Тогда говорят, что задана *числовая последовательность*

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

или, короче,— *числовая последовательность* (a_n).

Числа a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ... называются *членами последовательности*, число a_1 — *первым членом*, число a_2 — *вторым членом* и т. д. Число a_n называется *n-м членом* последовательности (a_n).

В примере 1:

$a_1 = 3$, $a_2 = 6$, $a_3 = 9$, ..., $a_{19} = 3 \cdot 19 = 57$, ..., $a_n = 3n$.

В примере 2:

$a_1 = -1$, $a_2 = 1$, $a_3 = -1$, ..., $a_{19} = (-1)^{19} = -1$, ..., $a_n = (-1)^n$.

▲ Закон, по которому каждому натуральному числу ставится в соответствие определенное действительное число, есть не что иное, как числовая функция с областью определения N (множеством натуральных чисел). Следовательно,

! *задать числовую последовательность — это значит задать функцию с областью определения N и множеством значений, содержащимся в R (множестве действительных чисел).* ▲

! *Задать числовую последовательность — это значит задать закон, по которому для каждого натурального числа n определяется ее n-й член. В алгебре числовая последовательность задается **формулой n-го члена**.*

Так, в примере 1 последовательность задается формулой $a_n = 3n$. В примере 2 последовательность задается формулой $a_n = (-1)^n$.

Последовательность может быть задана *рекуррентной формулой*. Эта формула выражает каждый член последовательности, начиная с некоторого k-го, через один или несколько предыдущих, а первые $k - 1$ членов последовательности просто указываются.

a Рекуррентный — от латинского слова *recurrens (recurrentis)* — возвращающийся. Последовательность, которую задают рекуррентной формулой, называют еще возвратной.

Пример 3. Последовательность (a_n) задана рекуррентной формулой $a_n = 2a_{n-1} - 3$, $a_1 = 7$. Найти a_5.

Решение. $a_2 = 2a_1 - 3 = 2 \cdot 7 - 3 = 11;$
$a_3 = 2a_2 - 3 = 2 \cdot 11 - 3 = 19;$
$a_4 = 2a_3 - 3 = 2 \cdot 19 - 3 = 35;$
$a_5 = 2a_4 - 3 = 2 \cdot 35 - 3 = 67.$

Пример 4. Последовательность (a_n) задана рекуррентной формулой $a_{n+1} = a_{n-1} + a_n$ и $a_1 = a_2 = 1$. Найти a_7.

Решение.
$a_3 = a_1 + a_2 = 1 + 1 = 2;$
$a_4 = a_2 + a_3 = 1 + 2 = 3;$
$a_5 = a_3 + a_4 = 2 + 3 = 5;$
$a_6 = a_4 + a_5 = 3 + 5 = 8;$
$a_7 = a_5 + a_6 = 5 + 8 = 13.$

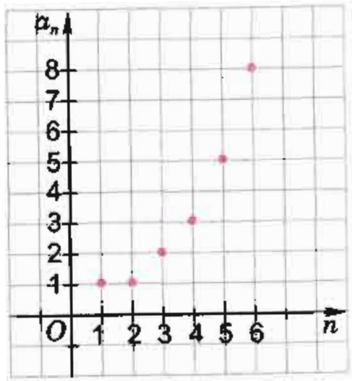


Рис. 72

▲ Поскольку числовая последовательность является функцией, то можно изобразить ее график.

График последовательности (a_n) представляет собой бесконечное множество точек с координатами $(n; a_n)$, где $n \in N$.

На рисунке 72 изображены первые 6 точек графика последовательности (a_n) из примера 4.

Есть и другой способ графического изображения членов числовых последовательностей на одной координатной прямой. Этот способ показан на рисунке 73 для последовательности из примера 4. ▲

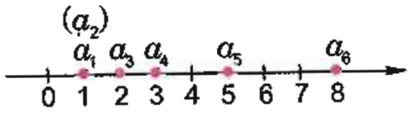


Рис. 73

a Последовательность, рассмотренную в примере 4, первым начал исследовать в 1202 г. итальянский математик Леонард Пизанский по прозванию Фибоначчи. В конце XV в. математик из Венеции Лука Пачоли продолжил изучение этой последовательности и установил связь ее членов (он назвал их числами Фибоначчи) с золотым сечением или божественной пропорцией.

?

1. Приведите свои примеры числовых последовательностей.
2. В каком случае говорят, что задана числовая последовательность?
3. Как обозначается числовая последовательность a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...?
4. Как называются числа из числовой последовательности? Как называется каждое из чисел: a_1, a_2, a_n, a_k?
5. Как может быть задана числовая последовательность? Приведите пример.

Упражнения

3.1°. Дана последовательность квадратов натуральных чисел

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \ldots, n^2, (n+1)^2, \ldots .$$

а) Назовите четвертый, седьмой, девятый, n-й, $(n+3)$-й члены данной последовательности.

б) Каким по счету (по номеру) членом данной последовательности является число:

$$9,\ 64,\ k^2,\ (n-1)^2,\ (n+2)^2?$$

в) Какой член данной последовательности следует за членом:

$$49,\ 100,\ k^2,\ (n+1)^2,\ (n+3)^2?$$

г) Является ли членом данной последовательности число:

$$39,\ -25,\ 1,\ 169,\ 1000,\ 125,\ 625,\ 10\,000?$$

3.2. Дана последовательность кубов целых неотрицательных чисел

$$0, 1, 8, 27, 64, \ldots, n^3, (n+1)^3, \ldots .$$

а) Назовите пятый, восьмой, десятый, n-й, $(n+2)$-й члены данной последовательности.

б) Каким по счету (по номеру) членом данной последовательности является число:

$$125,\ 729,\ k^3,\ (n-2)^3,\ (n+1)^3?$$

в) Какой член данной последовательности следует за членом:

$$343,\ 1000,\ k^3,\ (n+2)^3,\ (n-2)^3?$$

г) Является ли членом данной последовательности число:

$$4,\ -27,\ 216,\ 169,\ 125\,000,\ 1\,000\,000?$$

3.3. Вычислите первые четыре члена последовательности (a_n), если:

1) $a_n = 3n + 2$; 2) $a_n = 4n - 1$;
3) $a_n = 5n - 7$; 4) $a_n = 6 + 2n$;
5) $a_n = n(n+2)$; 6) $a_n = n(n-1)$;
7) $a_n = 4^{n-1}$; 8) $a_n = 3^{n+1}$.

3.4. Вычислите первые три члена последовательности (a_n), если:

1) $a_n = n^2 - 2n^3$; 2) $a_n = 3n^2 + n^3$;
3) $a_n = 1 + \frac{2}{n}$; 4) $a_n = 2 - \frac{1}{n}$;
5) $a_n = (-1)^n$; 6) $a_n = (-2)^{n+1}$;
7) $a_n = 1 + \frac{1}{n^2}$; 8) $a_n = 2 - \frac{2}{n^2}$.

3.5. Вычислите 10-й и 15-й члены последовательности (a_n), если:

1) $a_n = 6n + 10$; 2) $a_n = 8 - 2n$;
3) $a_n = |n - 1| + 4$; 4) $a_n = |2n + 1| - 8$;
5) $a_n = \frac{2n-1}{2n+1}$; 6) $a_n = \frac{6n+2}{4n-1}$;
7) $a_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$; 8) $a_n = \frac{2-(-1)^{n+1}}{(-1)^n}$.

3.6. Последовательность (a_n) задана формулой n-го члена. Вычислите a_3, a_5, a_6, если:

1) $a_n = 8 + 3(n-1)$; 2) $a_n = 10 - 2(3 - n)$;
3) $a_n = 4 \cdot 3^{n-1}$; 4) $a_n = 0{,}5 \cdot 2^{n+1}$;
5) $a_n = \left|-\frac{n-1}{n+1}\right|$; 6) $a_n = |n(1-n)|$;
7) $a_n = \frac{2^n+1}{2^n-1}$; 8) $a_n = \frac{1-3^n}{1+3^n}$.

3.7. Вычислите второй, третий, четвертый и пятый члены последовательности (a_n), если:

1) первый член равен 8, а каждый следующий на 4 больше предыдущего;
2) первый член равен 3, а каждый следующий в 6 раз больше предыдущего;
3) первый член равен 18, а каждый следующий на 9 меньше предыдущего;
4) первый член равен 120, а каждый следующий в 4 раза меньше предыдущего.

3.8. Найдите пять первых членов последовательности (a_n) натуральных чисел, кратных:

1) 3; 2) 5; 3) 9; 4) 10.

Запишите формулу n-го члена.

3.9. Запишите пять первых членов последовательности (a_n) натуральных чисел, которые:

1) при делении на 3 дают в остатке 2;
2) при делении на 5 дают в остатке 3;
3) при делении на 6 дают в остатке 1;
4) при делении на 10 дают в остатке 5.

Запишите формулу n-го члена.

3.10. Найдите 4-й, 6-й и 7-й члены последовательности (a_n), зная, что:

1) $a_n = \begin{cases} 2, \text{ если } n \text{ — нечетное число,} \\ \dfrac{n+2}{n}, \text{ если } n \text{ — четное число;} \end{cases}$

2) $a_n = \begin{cases} \dfrac{2}{n}, \text{ если } n \text{ — четное число,} \\ \dfrac{2}{n+1}, \text{ если } n \text{ — нечетное число.} \end{cases}$

3.11*. Последовательность (a_n) задана рекуррентной формулой $a_{n+1} = (4n+2)a_n$ и $a_1 = 3$. Найдите a_5.

3.12*. Последовательность (a_n) задана рекуррентной формулой $a_{n+1} = 2a_n + 3n$ и $a_1 = 2$. Найдите a_8.

3.13*. Найдите a_5, если последовательность (a_n) задана рекуррентной формулой:

1) $a_{n+2} = \dfrac{2a_n + 4a_{n+1}}{5}$ и $a_1 = -1$, $a_2 = 3$;

2) $a_{n+2} = \dfrac{3a_n - 2a_{n+1}}{2}$ и $a_1 = 1$, $a_2 = -4$;

3) $a_{n+2} = a_n^2 + 2\,a_{n+1}^2$ и $a_1 = 2$, $a_2 = 3$;

4) $a_{n+2} = a_n - a_{n+1}^2$ и $a_1 = 5$, $a_2 = -1$.

3.2. Арифметическая прогрессия

Определение. ***Арифметической прогрессией*** **называется числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с постоянным для этой последовательности числом. Это число называется** ***разностью арифметической прогрессии.***

Таким образом, арифметическая прогрессия с разностью d — это такая числовая последовательность (a_n), что для любого натурального n

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

Арифметическая — от греческого слова *aritmos* — число; прогрессия — от латинского слова *progressio* — движение вперед, возрастание.

Пример 1. Натуральный ряд

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$$

является арифметической прогрессией с первым членом 1 и разностью 1, т. е. $a_1 = 1$, $d = 1$.

Пример 2. Последовательность нечетных натуральных чисел

$$1, 3, 5, \ldots, 2n-1, \ldots$$

является арифметической прогрессией с первым членом 1 и разностью 2, т. е. $a_1 = 1$, $d = 2$.

Пример 3. Последовательность, каждый член которой равен 5

$$5, 5, 5, \ldots, 5, \ldots,$$

является арифметической прогрессией с первым членом 5 и разностью 0, т. е. $a_1 = 5$, $d = 0$.

Пример 4. Последовательность четных неположительных чисел

$$0, -2, -4, -6, \ldots, -2n+2, \ldots$$

является арифметической прогрессией с первым членом 0 и разностью -2, т. е. $a_1 = 0$, $d = -2$.

Теорема 1. Пусть (a_n) — арифметическая прогрессия с разностью d. Тогда формула ее n-го члена имеет вид

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Доказательство. По определению арифметической прогрессии с разностью d имеем:

$$\begin{gathered} a_2 = a_1 + d; \\ a_3 = a_2 + d; \\ a_4 = a_3 + d; \\ \ldots \\ a_{n-1} = a_{n-2} + d; \\ a_n = a_{n-1} + d. \end{gathered}$$

Число этих равенств $n - 1$. Сложив их левые части и сложив их правые части, получим верное числовое равенство

$$a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + (n-1)d.$$

Отсюда после приведения подобных членов получим

$$a_n = a_1 + (n-1)d. \ \boxtimes$$

В рассмотренных примерах 1 — 4 формулы n-го члена соответственно имеют вид:

1) $a_n = n$;
2) $a_n = 2n - 1$;
3) $a_n = 5$;
4) $a_n = 2 - 2n$.

▲ **Теорема 2** (свойство арифметической прогрессии). **Каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, является средним арифметическим предыдущего и последующего членов этой прогрессии, т. е. $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$.**

Доказательство. По формуле n-го члена арифметической прогрессии имеем:

$$\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{a_1 + (n-2)d + a_1 + nd}{2} = \frac{2a_1 + 2(n-1)d}{2} =$$
$$= a_1 + (n-1)d = a_n. \ \boxtimes$$

Свойство арифметической прогрессии, сформулированное в теореме 2, называется ***характеристическим***, потому что каждая последовательность, обладающая этим свойством, является арифметической прогрессией.

▲ **Теорема 3** (признак арифметической прогрессии). **Если каждый член числовой последовательности, начиная со второго, является средним арифметическим предыдущего и последующего членов, то эта последовательность — арифметическая прогрессия.**

Доказательство. Пусть (a_n) — числовая последовательность и a_{n-1}, a_n, a_{n+1} — ее последовательные члены. По условию при любом $n \geqslant 2$ верно равенство

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Это равенство преобразуем следующим образом:

$$\begin{gathered} 2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}; \\ a_n + a_n = a_{n-1} + a_{n+1}; \\ a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n. \end{gathered}$$

Значит, в последовательности (a_n) разность между каждым ее членом и предшествующим ему членом есть одно и то же число. Обозначив это число (разность) буквой d, получим, что $a_{n+1} - a_n = d$ при любом натуральном n, откуда имеем

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

Значит, согласно определению, (a_n) — арифметическая прогрессия. ⊠ ▲

Пример 5. Найти разность d арифметической прогрессии (a_n), если $a_6 = 12$, $a_{10} = 100$.

Решение. По формуле n-го члена имеем

$$a_6 = a_1 + 5d \text{ и } a_{10} = a_1 + 9d.$$

Откуда, согласно условию, имеем:

$$\begin{cases} a_1 + 5d = 12, \\ a_1 + 9d = 100. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем

$$4d = 88, \text{ т. е. } d = 22.$$

Ответ: $d = 22$.

Пример 6. а) Доказать, что числовая последовательность (a_n), заданная формулой $a_n = 2n - 7$, является арифметической прогрессией.

▲ б) Изобразить график последовательности (a_n). ▲

Доказательство. а) *Способ 1.* Выпишем члены последовательности:

$$a_n = 2n - 7,$$
$$a_{n+1} = 2n + 2 - 7 = 2n - 5.$$

Найдем значение разности $a_{n+1} - a_n$:

$$a_{n+1} - a_n = 2n - 5 - (2n - 7) =$$
$$= 2n - 5 - 2n + 7 = 2.$$

Таким образом, $a_{n+1} = a_n + 2$, и на основании определения арифметической прогрессии последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия. ⊠

▲ *Способ 2.* Выпишем a_{k-1}, a_k, a_{k+1} — члены последовательности (a_n):

$$a_{k-1} = 2(k-1) - 7 = 2k - 9;$$
$$a_k = 2k - 7;$$
$$a_{k+1} = 2(k+1) - 7 = 2k - 5.$$

Найдем среднее арифметическое членов a_{k-1} и a_{k+1}:

$$\frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2} = \frac{2k - 9 + 2k - 5}{2} = 2k - 7 = a_k.$$

Таким образом,

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}.$$

Значит, на основании теоремы 3 (признака арифметической прогрессии) последовательность (a_n) является арифметической прогрессией. ⊠

б) График последовательности (a_n) изображен на рисунке 74. Обратите внимание, что ордината каждой следующей точки **больше** ординаты предыдущей точки **на 2 единицы.**

На рисунке 75 члены последовательности отмечены точками координатной прямой. Обратите внимание, что абсцисса каждой следующей точки **больше** абсциссы предыдущей точки **на 2 единицы.** ▲

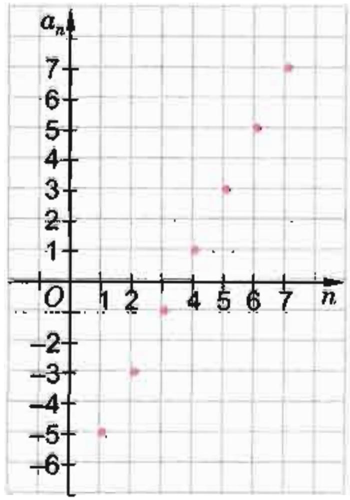


Рис. 74

Рис. 75

Задачи, связанные с арифметической прогрессией, встречаются уже в египетских папирусах (около XX в. до н. э.).

1. Сформулируйте определение арифметической прогрессии. Приведите свои примеры арифметических прогрессий.
2. Укажите формулу n-го члена арифметической прогрессии.

3*. Сформулируйте характеристическое свойство арифметической прогрессии.

4*. Как установить, является ли числовая последовательность арифметической прогрессией?

5*. Сформулируйте признак арифметической прогрессии.

Упражнения

3.14. Является ли арифметической прогрессией числовая последовательность:

1) 1, 4, 7, 10, ...; 2) 2, −3, 4, −5, ...;
3) 9, 6, 3, 0, ...; 4) −3, 2, 0, 5, 3, ...;
5) 2, 1, 5, 1, 0, ...; 6) 1, −1, 2, −2, 3, −3, ...;
7) $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, ...; 8) 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, ...?

3.15°. Запишите первые четыре члена арифметической прогрессии (a_n), если:

1) $a_1 = 3,\ d = 1$; 2) $a_1 = -2,\ d = 2$;
3) $a_1 = 0,\ d = -3$; 4) $a_1 = 6,\ d = -4$;
5) $a_1 = 34,\ d = \frac{1}{2}$; 6) $a_1 = 9,\ d = \frac{1}{3}$.

3.16°. Найдите разность арифметической прогрессии (a_n), если:

1) $a_3 = 8,\ a_4 = 6$; 2) $a_5 = 9,\ a_6 = 12$;
3) $a_8 = 3\frac{1}{2},\ a_7 = 4\frac{2}{3}$; 4) $a_{13} = 15\frac{1}{8},\ a_{12} = 8\frac{3}{4}$.

3.17. Найдите шестой член и разность арифметической прогрессии:

1) 3, 7, 11, 15, ...; 2) 7, 9, 11, 13, ...;
3) −4, −2, 0, 2, ...; 4) −16, −12, −8, −4, ...;
5) 2, $2\frac{1}{3}$, $2\frac{2}{3}$, 3, ...; 6) $5\frac{1}{2}$, 5, $4\frac{1}{2}$, 4, ...;
7) 2, $2+\sqrt{3}$, $2+2\sqrt{3}$, ...; 8) $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}-2$, $\sqrt{3}-4$, ...;
9) 5, 5, 5, 5, ...; 10) −6, −6, −6, −6, ...

3.18°. В арифметической прогрессии (a_n) с разностью d найдите:

1) a_{10}, если $a_1 = 4,\ d = 3$;
2) a_{20}, если $a_1 = 3,\ d = 5$;
3) a_{16}, если $a_1 = -1,\ d = -6$;
4) a_7, если $a_1 = -4,\ d = -3$;
5) a_4, если $a_1 = 8,\ d = \frac{1}{2}$;
6) a_{13}, если $a_1 = -5\frac{1}{3},\ d = -\frac{1}{3}$.

3.19°. Найдите разность арифметической прогрессии (a_n), если:

1) $a_1 = 8,\ a_{10} = 38$; 2) $a_1 = 3,\ a_{20} = 117$;
3) $a_1 = -2,\ a_{10} = 148$; 4) $a_1 = -8,\ a_{14} = 18$;
5) $a_3 = 25,\ a_8 = 35$; 6) $a_3 = 12,\ a_7 = -4$;
7) $a_5 = 12,\ a_8 = 27$; 8) $a_4 = 15,\ a_7 = 10$.

3.20. Определите первый член арифметической прогрессии (a_n) с разностью d, если:

1) $a_n = -10,\ n = 6,\ d = -3$;
2) $a_n = 20,\ n = 7,\ d = 3$;
3) $a_n = 17,\ n = 12,\ d = 2$;
4) $a_n = -55,\ n = 10,\ d = -7$;
5) $a_n = -11,\ n = 18,\ d = -1$;
6) $a_n = -10,\ n = 15,\ d = 2$;
7) $a_n = 1,\ n = 13,\ d = -\frac{1}{4}$;
8) $a_n = 459,\ n = 45,\ d = 10$.

3.21. Запишите первые пять членов арифметической прогрессии (a_n), если:

1) $a_n = 12 - 6n$; 2) $a_n = 10n - 5$;
3) $a_n = 6(n+1)$; 4) $a_n = -2(n-4)$.

3.22. Найдите формулу n-го члена арифметической прогрессии (a_n), если первые ее четыре члена следующие:

1) 6, 10, 14, 18; 2) 3, 5, 7, 9;
3) 1, −4, −9, −14; 4) −3, −8, −13, −18;
5) 5, $5\frac{1}{4}$, $5\frac{1}{2}$, $5\frac{3}{4}$; 6) 4, $3\frac{2}{3}$, $3\frac{1}{3}$, 3;
7) $6a^2$, $9a^2$, $12a^2$, $15a^2$;
8) a^3+1, a^3+2, a^3+3, a^3+4.

3.23. Найдите формулу n-го члена арифметической прогрессии (a_n), если:

1) $a_5 = 13,\ a_8 = 22$; 2) $a_8 = 13,\ a_{11} = 1$;
3) $a_7 = -7,\ a_{12} = 18$; 4) $a_5 = -32,\ a_7 = -44$.

3.24. 1) Число −16 является членом арифметической прогрессии 29, 24, 19, 14, ... Найдите номер этого члена.
2) Число −36 является членом арифметической прогрессии 18, 12, 6, 0, ... Найдите номер этого члена.

3.25. 1) Является ли число 34 членом арифметической прогрессии $-10, -7, -4, \ldots$? Если да, то укажите его номер.
2) Является ли число 120 членом арифметической прогрессии $-3, 2, 7, \ldots$? Если да, то укажите его номер.

3.26. Найдите номер n-го члена арифметической прогрессии (a_n), если:

1) $a_n = 120$, $a_2 = 22$, $a_4 = 50$;
2) $a_n = -100$, $a_5 = 40$, $a_8 = -2$.

3.27. Докажите, что последовательность (a_n) является арифметической прогрессией. Найдите a_1, d, a_{40}, если:

1) $a_n = 8 - 5n$; 2) $a_n = 3 - 4n$.

3.28. Запишите первые пять членов арифметической прогрессии (a_n), если:

1) $a_1 = 8$, $a_3 = 16$; 2) $a_1 = 10$, $a_3 = 2$;
3) $a_{13} = 12$, $a_5 = 6$; 4) $a_5 = 14$, $a_7 = 34$.

3.29. Найдите a_1, a_6 и разность d арифметической прогрессии (a_n), если:

1) $a_5 = 30$, $a_7 = 36$; 2) $a_5 = 12$, $a_7 = 26$;
3) $a_5 = -8$, $a_7 = -4$; 4) $a_5 = -2$, $a_7 = -14$.

3.30. Найдите a_{29} и a_1 арифметической прогрессии (a_n), если:

1) $a_{28} = 28$, $a_{30} = 38$; 2) $a_{28} = -6$, $a_{30} = 6$.

3.31. 1) Между числами -7 и 3 вставьте два числа так, чтобы полученные четыре числа были последовательными членами арифметической прогрессии.
2) Между числами -7 и 3 вставьте три числа так, чтобы полученные пять чисел были последовательными членами арифметической прогрессии.
3) Между числами 5 и 26 поместите шесть чисел так, чтобы они вместе с данными числами стали последовательными членами арифметической прогрессии.
4) Между числами 1 и 25 поместите пять чисел так, чтобы они вместе с данными числами стали последовательными членами арифметической прогрессии.

3.32. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии, в которой:

1) $a_2 + a_5 - a_3 = 10$ и $a_1 + a_6 = 17$;
2) $a_4 + a_6 - a_7 = 11$ и $a_2 + a_5 = 25$;
3) $a_8 - a_5 = 12$ и $a_6 : a_2 = 2$;
4) $a_7 - a_3 = 8$ и $a_4 \cdot a_6 = 525$.

3.33*. Докажите, что:
1) если числовая последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия, то каждый ее член (начиная с $(k+1)$-го) равен среднему арифметическому двух членов, отстоящих от этого члена на k мест, т. е.

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2};$$

2) если каждый член числовой последовательности (начиная с $(k+1)$-го) равен среднему арифметическому двух ее членов, равноотстоящих от этого члена на k мест, т. е.

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2},$$

то эта последовательность является арифметической прогрессией ($k \in N$).

3.3. Сумма n первых членов арифметической прогрессии

Теорема 1. Пусть $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ — первые n членов арифметической прогрессии и p — натуральное число, $1 \leqslant p \leqslant n-1$. Тогда верно равенство

$$a_{1+p} + a_{n-p} = a_1 + a_n. \quad (1)$$

Доказательство. Преобразуем левую часть равенства (1), используя формулу n-го члена арифметической прогрессии:

$$a_{1+p} + a_{n-p} = a_1 + (1 + p - 1)d + a_1 + (n - p - 1)d = \\ = 2a_1 + (n-1)d.$$

Преобразуем правую часть равенства (1), используя формулу n-го члена арифметической прогрессии:

$$a_1 + a_n = a_1 + a_1 + (n-1)d = 2a_1 + (n-1)d. \ \boxtimes$$

О любых первых n членах арифметической прогрессии говорят, что они образуют *конечную арифметическую прогрессию*. Первый и n-й члены этой прогрессии называются ее концами (крайними членами). При этом равенство (1) читается так:

в конечной арифметической прогрессии сумма членов, равноотстоящих от концов, равна сумме крайних членов.

Пример 1. В конечной арифметической прогрессии (a_n) семнадцать членов, причем $a_1 + a_{17} = 35$ и $a_6 = 7$. Найти a_{12}.

Решение. По формуле n-го члена получим:

$$a_6 = a_1 + 5d, \text{ т. е. } 7 = a_1 + 5d,$$
$$a_1 + a_{17} = a_1 + a_1 + 16d = 2a_1 + 16d,$$
$$\text{т. е. } 2a_1 + 16d = 35.$$

Составим систему уравнений и решим ее:

$$\begin{cases} 7 = a_1 + 5d, \\ 35 = 2a_1 + 16d; \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 = 7 - 5d, \\ 35 = 2(7 - 5d) + 16d; \end{cases}$$
$$\begin{cases} a_1 = -10{,}5, \\ d = 3{,}5. \end{cases}$$

По формуле n-го члена

$$a_{12} = a_1 + 11d = -10{,}5 + 11 \cdot 3{,}5 = -10{,}5 + 38{,}5 = 28.$$

Ответ: $a_{12} = 28$.

Можно этот пример решить иначе.
Заметив, что $a_6 = a_{1+5}$, $a_{12} = a_{17-5}$ на основании равенства (1), получим

$$a_{1+5} + a_{17-5} = a_1 + a_{17},$$

т. е. $a_6 + a_{12} = a_1 + a_{17}$ и по условию имеем $7 + a_{12} = 35$, откуда следует, что $a_{12} = 28$.

Ответ: $a_{12} = 28$.

Сумму первых n членов арифметической прогрессии (a_n) будем обозначать S_n, т. е.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n.$$

Теорема 2. Для арифметической прогрессии (a_n) имеют место формулы:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n, \qquad (2)$$

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n. \qquad (3)$$

Доказательство. Докажем формулу (2). Запишем сумму S_n дважды: в порядке возрастания и в порядке убывания номеров членов прогрессии:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n,$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1.$$

Сложив левые части этих равенств и сложив их правые части, получим

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots +$$
$$+ (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

По теореме 1 каждая сумма, стоящая в скобках, равна $a_1 + a_n$, а таких сумм n, поэтому $2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n$, откуда

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}. \boxtimes$$

▲ Докажите формулу (3) самостоятельно, используя формулу (2) и формулу $a_n = a_1 + (n-1)d$. ▲

Занимательную историю рассказывают о великом немецком математике К. Ф. Гауссе (1777—1855). Когда он учился в начальной школе, учитель, желая занять блестящего, но шаловливого ученика, предложил ему сложить все числа от 1 до 100. Однако менее чем через минуту задача была решена. Юный Гаусс заметил, что

$$1 + 2 + \ldots + 99 + 100 = (1 + 100) + (2 + 99) + \ldots =$$
$$= 101 \cdot 50 = 5050.$$

Пример 2. Найти S_{10} для арифметической прогрессии (a_n), если $a_4 + a_8 = 24$ и $a_5 + a_{10} = 348$.

Решение. Используя формулу n-го члена арифметической прогрессии, находим:

$$a_4 + a_8 = a_1 + 3d + a_1 + 7d = 2a_1 + 10d;$$
$$a_5 + a_{10} = a_1 + 4d + a_1 + 9d = 2a_1 + 13d.$$

Таким образом, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 2a_1 + 10d = 24, \\ 2a_1 + 13d = 348. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим: $d = 108$, $a_1 = -528$.

По формуле (3) найдем

$$S_{13} = \frac{2a_1 + 12d}{2} \cdot 13 = (a_1 + 6d)13 = (-528 + 6 \cdot 108)13 =$$
$$= -120 \cdot 13 = -1560.$$

Ответ: $S_{13} = -1560$.

Пример 3. Добрый волшебник раздал первым пяти встречным 100 золотых монет. Каждому встречному он давал на одно и то же число монет больше, чем предыдущему. Сколько монет получил каждый из пяти встречных, если последние три получили в три раза больше, чем первые два?

Решение. Используя доказанные в теореме 2 формулы, по условию задачи составим систему уравнений $\begin{cases} S_5 = 100, \\ 3S_2 = S_5 - S_2, \end{cases}$ откуда получим:

$$\begin{cases} S_5 = 100, \\ S_2 = 25; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{2a_1 + 4d}{2} \cdot 5 = 100, \\ 2a_1 + d = 25; \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 + 2d = 20, \\ 2a_1 + d = 25. \end{cases}$$

Решив эту систему, находим: $a_1 = 10$, $d = 5$. Таким образом, 100 монет пяти встречным были розданы в количестве: 10, 15, 20, 25, 30.

Ответ: 10; 15; 20; 25; 30.

Древнегреческие математики установили связь арифметической прогрессии, состоящей из нечетных чисел, с некоторыми красивыми числовыми соотношениями. Так, например, они заметили, что: $1 = 1^2$; $1 + 3 = 2^2$; $1 + 3 + 5 = 3^2$; $1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$ и т. д.

Привлекла внимание древних греков и такая закономерность:

$$1 = 1^3; \quad 3 + 5 = 2^3; \quad 7 + 9 + 11 = 3^3;$$
$$13 + 15 + 17 + 19 = 4^3 \text{ и т. д.}$$

1. Приведите пример конечной арифметической прогрессии.
2. Сформулируйте свойство членов конечной арифметической прогрессии, равноотстоящих от ее концов.
3. Как обозначают сумму n первых членов арифметической прогрессии?
4. По каким формулам можно вычислить сумму n первых членов арифметической прогрессии?

Упражнения

3.34. Найдите число членов конечной арифметической прогрессии (a_n), если:

1) $a_1 = 1$, $a_n = 61$, $d = 5$; 2) $a_1 = 15$, $a_n = -15$, $d = -6$.

3.35. 1) В конечной арифметической прогрессии (a_n) известно, что $a_1 + a_9 = 46$ и $a_4 = 18$. Найдите a_7.

2) В конечной арифметической прогрессии (a_n) известно, что $a_1 + a_{29} = 1{,}2$ и $a_{10} = 12$. Найдите a_{18}.

3.36°. Найдите сумму n первых членов арифметической прогрессии (a_n), если:

1) $a_1 = 2$, $a_n = 40$, $n = 50$;
2) $a_1 = -1$, $a_n = 100$, $n = 40$;
3) $a_1 = -2$, $a_n = -80$, $n = 100$;
4) $a_1 = 2$, $a_n = 200$, $n = 50$;
5) $a_1 = 1 + \sqrt{2}$, $a_n = 1 - 13\sqrt{2}$, $n = 10$;
6) $a_1 = 1 - \sqrt{3}$, $a_n = 1 + 25\sqrt{3}$, $n = 5$.

3.37°. 1) Найдите сумму всех четных чисел от 2 до 400 включительно.

2) Найдите сумму всех нечетных чисел от 5 до 169 включительно.

3) Найдите сумму всех двузначных чисел от 17 до 99 включительно.

4) Найдите сумму всех трехзначных чисел от 840 до 999 включительно.

3.38. В арифметической прогрессии (a_n) имеем $a_1 + a_{49} = 13{,}4$. Решите уравнение:

1) $2(a_4 + a_{46})x = a_2 + a_8 + a_{13} + a_{37} + a_{42} + a_{48}$;
2) $5(a_{21} + a_{19})x = a_{11} + a_{23} - a_{24} - a_{26} + a_{27} + a_{39}$;
3) $(a_4 + a_{46})x^2 - (a_{11} + a_{39})x = -a_8 - a_{20} - a_{30} - a_{42}$;
4) $(a_8 + a_{42})x^2 + (a_{13} + a_{37})x = -a_3 - a_{15} - a_{35} - a_{47}$.

3.39. 1) Найдите сумму 20 членов арифметической прогрессии b, $4b$, $7b$, ...
2) Найдите сумму 36 членов арифметической прогрессии b^2, $6b^2$, $11b^2$, ...

3.40°. Найдите сумму n первых членов арифметической прогрессии:

1) 13, 15, 17, ..., если $n = 17$;
2) 29, 26, 23, ..., если $n = 10$;
3) -8, -4, 0, ..., если $n = 20$;
4) -12, -17, -22, ..., если $n = 8$;
5) $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, 1, ..., если $n = 18$;
6) $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, ..., если $n = 30$.

3.41. Найдите a_1 и d арифметической прогрессии (a_n), если:

1) $S_5 = 65$ и $S_{10} = 320$;
2) $S_4 = 32$ и $S_6 = 60$;
3) $a_7 = 21$ и $S_7 = 105$;
4) $a_4 = 88$ и $S_{14} = 105$.

3.42. Найдите a_n и d арифметической прогрессии (a_n), если:

1) $a_1 = 10$, $n = 14$, $S_n = 1050$;
2) $a_1 = 40$, $n = 20$, $S_n = -40$.

3.43. Найдите сумму:
1) всех натуральных чисел, не превосходящих 120;
2) всех натуральных чисел, кратных 3 и не превосходящих 280;
3) всех натуральных чисел, кратных 8 и не превосходящих 240;
4) всех натуральных чисел, кратных 12 и не превосходящих 960.

3.44*. Арифметическая прогрессия (a_n) задана формулой n-го члена. Найдите S_{70}, если:

1) $a_n = 2n + 5$;
2) $a_n = 8 + 3n$;
3) $a_n = 138 - 3n$;
4) $a_n = 244 - 2n$.

3.45*. 1) Найдите S_{11} для арифметической прогрессии (a_n), если:

а) $a_3 + a_9 = 12$; б) $a_4 + a_8 = 37$.

2) Найдите S_{20} для арифметической прогрессии (a_n), если:

а) $a_2 + a_{19} = 24$; б) $a_3 + a_{18} = 52$.

3.46*. Найдите a_1 и d арифметической прогрессии (a_n), в которой:

1) $5a_1 + 10a_5 = 0$ и $S_4 = 14$;
2) $3a_4 - 2a_6 = 8$ и $S_8 = 208$.

3.47*. Решите уравнение:

1) $1 + 4 + 7 + ... + x = 117$;
2) $1 + 7 + 13 + ... + x = 280$;
3) $3 + 7 + 11 + ... + x = 300$;
4) $2 + 6 + 10 + ... + x = 450$;
5) $(x + 1) + (x + 4) + (x + 7) + ... + (x + 28) = 155$;
6) $(3 + x) + (9 + x) + (15 + x) + ... + (93 + x) = 832$.

3.48*. Найдите сумму S_n указанных первых n членов арифметической прогрессии:

1) 4, 8, 12, ..., 312;
2) 3, 6, 9, ..., 288;
3) 90, 80, 70, ..., -40;
4) 72, 70, 68, ..., -6;
5) -34, -29, -24, ..., 31;
6) -20, -17, -14, ..., 19;
7) $\frac{7}{3}$, $\frac{11}{3}$, $\frac{15}{3}$, ..., $\frac{51}{3}$;
8) $\frac{1}{3}$, 0, $-\frac{1}{3}$, ..., $-\frac{22}{3}$.

3.49*. Является ли арифметической прогрессией (a_n) последовательность, сумма членов которой может быть найдена по формуле:

1) $S_n = 4n^2 + 2n$; 2) $S_n = n^2 - n$;
3) $S_n = 8n^2$; 4) $S_n = -6n^2$;
5) $S_n = (6n + 1)n$; 6) $S_n = n(2 - n)$?

3.50. 1) Сколько ударов сделают часы в течение суток, если они отбивают только число целых часов от 1 до 12?
2) Амфитеатр состоит из 10 рядов, причем в каждом следующем ряду на 10 мест больше, чем в предыдущем, а в последнем ряду 280 мест. Сколько мест в амфитеатре?

3.51. 1) Могут ли длины сторон прямоугольного треугольника образовать конечную арифметическую прогрессию?
2) Могут ли длины сторон и периметр треугольника образовать конечную арифметическую прогрессию?

3.52. 1) Градусные меры внутренних углов многоугольника образуют конечную арифметическую прогрессию с первым членом 120° и разностью 5°. Найдите число сторон многоугольника.
2) Длины сторон выпуклого многоугольника образуют конечную арифметическую прогрессию, разность которой равна 3 см. Сколько сторон имеет многоугольник, если его наибольшая сторона равна 44 см, а периметр равен 158 см?

3.4. Геометрическая прогрессия

Определение. ***Геометрической прогрессией*** называется числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на постоянное для этой последовательности, отличное от нуля, число. Это число называется ***знаменателем геометрической прогрессии***.

Таким образом, геометрическая прогрессия со знаменателем q — это такая числовая последовательность (b_n), что для любого натурального n

$$b_{n+1} = b_n \cdot q.$$

Приведем несколько примеров.

Пример 1. Последовательность

$$3,\ 6,\ 12,\ \ldots,\ 3 \cdot 2^{n-1},\ \ldots$$

является геометрической прогрессией с первым членом $b_1 = 3$ и знаменателем $q = 2$.

Пример 2. Последовательность

$$5,\ \frac{5}{6},\ \frac{5}{6^2},\ \ldots,\ \frac{5}{6^{n-1}},\ \ldots$$

является геометрической прогрессией с первым членом $b_1 = 5$ и знаменателем $q = \frac{1}{6}$.

Пример 3. Последовательность, каждый член которой равен 5

$$5,\ 5,\ 5,\ \ldots,\ 5,\ \ldots,$$

является геометрической прогрессией с первым членом $b_1 = 5$ и знаменателем $q = 1$.

Пример 4. Последовательность, каждый член которой равен 0

$$0,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ \ldots,$$

является геометрической прогрессией с первым членом $b_1 = 0$ и знаменателем — произвольным числом $q \neq 0$.

▲ Заметим, что если один член геометрической прогрессии равен нулю, то каждый ее член равен нулю.

Из определения геометрической прогрессии следует, что если $b_1 = 0$, то $b_n = 0$, а если $b_1 \neq 0$, то $b_n \neq 0$.

В самом деле, из равенства

$$b_{n+1} = b_n \cdot q$$

видно, что если $b_n = 0$, то и $b_{n+1} = 0$, а если $b_{n+1} = 0$, то и $b_n = 0$ (так как по определению геометрической прогрессии $q \neq 0$). Другими словами, если какой-нибудь член геометрической прогрессии равен нулю, то следующий за ним и предшествующий ему члены этой прогрессии равны нулю. Ясно, что все следующие за ним и все предшествующие ему члены прогрессии также равны нулю.

Докажите, что если один член геометрической прогрессии не равен нулю, то каждый ее член не равен нулю. ☒ ▲

Теорема 1. Пусть (b_n) — геометрическая прогрессия со знаменателем q. Тогда формула ее n-го члена имеет вид

$$b_n = b_1 q^{n-1}.$$

Доказательство. По определению геометрической прогрессии со знаменателем q имеем:

$$b_2 = b_1 q,$$
$$b_3 = b_2 q,$$
$$\dots$$
$$b_{n-1} = b_{n-2} \cdot q,$$
$$b_n = b_{n-1} \cdot q.$$

Число этих равенств $n-1$. Перемножив их левые части и перемножив их правые части, получим верное числовое равенство

$$b_2 b_3 \dots b_{n-1} b_n = b_1 b_2 \dots b_{n-2} b_{n-1} \cdot q^{n-1}.$$

Разделив обе части этого равенства на число $b_2 b_3 \dots b_{n-1}$ (оно не равно нулю, объясните почему), получим

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}. \ \boxtimes$$

Архимед (ок. 287—212 гг. до н. э) геометрическую прогрессию вида $1, b, b^2, b^3, \dots$ называл непрерывной пропорцией. При изучении ее Архимед показал, что произведение степеней связано с суммой показателей степеней.

В учебнике и задачнике по арифметике, написанных в VII в. армянским ученым А. Ширакаци, применяются арифметическая и геометрическая прогрессии.

Немецкий математик М. Штифель (1487—1567) установил соответствия между действиями в арифметической и геометрической прогрессиях.

Пример 5. Дана геометрическая прогрессия $7, 21, 63, \dots$. Какой номер имеет член этой прогрессии — число 1701?

Решение. По условию имеем $b_1 = 7$, $b_2 = 21$, таким образом,

$$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{21}{7} = 3.$$

По формуле n-го члена геометрической прогрессии $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ получим $1701 = 7 \cdot 3^{n-1}$, откуда $3^{n-1} = \frac{1701}{7} = 243$, т. е. $3^{n-1} = 3^5$, значит, $n - 1 = 5$, $n = 6$.

Ответ: $n = 6$.

Пример 6. Последовательность задана формулой n-го члена $b_n = 0{,}2 \cdot 13^{n+2}$. Доказать, что данная последовательность является геометрической прогрессией.

Доказательство. Используя формулу $b_n = 0{,}2 \cdot 13^{n+2}$, найдем b_{n+1}:

$$b_{n+1} = 0{,}2 \cdot 13^{(n+1)+2} = 0{,}2 \cdot 13^{n+3}.$$

Найдем отношение b_{n+1} к b_n:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{0{,}2 \cdot 13^{n+3}}{0{,}2 \cdot 13^{n+2}} = 13, \text{ отсюда следует } b_{n+1} = b_n \cdot 13.$$

По определению последовательность (b_n) является геометрической прогрессией со знаменателем 13. $\boxtimes$

Напомним, что для двух чисел x и y одного знака их средним геометрическим называется число $\sqrt{xy}$.

▲ **Теорема 2** (свойство геометрической прогрессии). Модуль каждого члена геометрической прогрессии, начиная со второго, является средним геометрическим предыдущего и последующих членов, т. е. $|b_n| = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$.

Доказательство. Пусть (b_n) — геометрическая прогрессия со знаменателем q.

По формуле n-го члена геометрической прогрессии имеем

$$\sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}} = \sqrt{b_1 q^{n-2} \cdot b_1 q^n} = |b_1 \cdot q^{n-1}| = |b_n|. \ \boxtimes$$

Свойство геометрической прогрессии, сформулированное в теореме 2, называется ***характеристическим***, потому что каждая последовательность, обладающая этим свойством, является геометрической прогрессией.

Теорема 3 (признак геометрической прогрессии). Если модуль каждого члена числовой последовательности, начиная со второго, является средним геометрическим предыдущего и последующего членов и не равен нулю, то эта последовательность — геометрическая прогрессия.

Доказательство. Пусть (b_n) — данная числовая последовательность.

По условию при любом натуральном $n \geqslant 2$ имеет место равенство $|b_n| = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$.

Значит, $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$. Из этого равенства следует, что при любом $n \geqslant 2$

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Значит, в последовательности (b_n) частное от деления каждого ее члена на предшествующий ему член есть одно и то же число, отличное от нуля. Обозначив это число (частное) буквой q, получим, что $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q$ при любом натуральном n. Следовательно, при любом натуральном n

$$b_{n+1} = b_n q.$$

Значит, по определению последовательность (b_n) — геометрическая прогрессия. ⊠

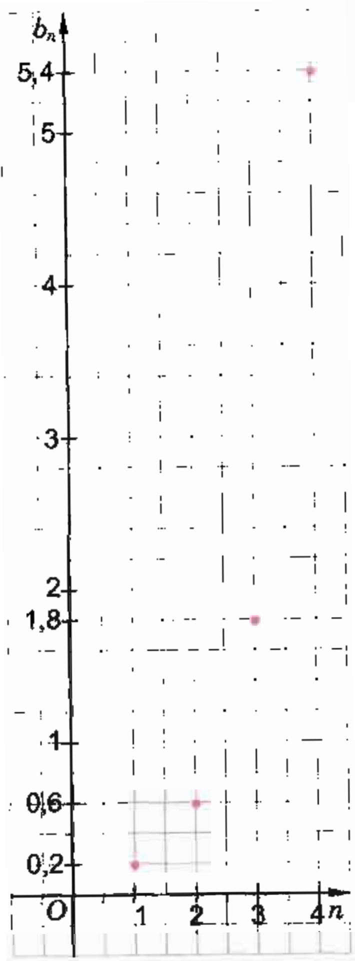


Рис. 76

Пример 7. Изобразить график геометрической прогрессии, у которой $b_1 = 0{,}2$, $q = 3$.

Решение. По формуле n-го члена геометрической прогрессии имеем $b_n = 0{,}2 \cdot 3^{n-1}$.

На рисунке 76 изображены первые четыре точки графика геометрической прогрессии (b_n). Обратите внимание, что ордината каждой следующей точки графика **в 3 раза больше** ординаты предыдущей точки.

На рисунке 77 первые четыре члена геометрической прогрессии (b_n) отмечены точками координатной прямой. Обратите внимание, что абсцисса каждой следующей точки **в 3 раза больше** абсциссы предыдущей точки. ▲

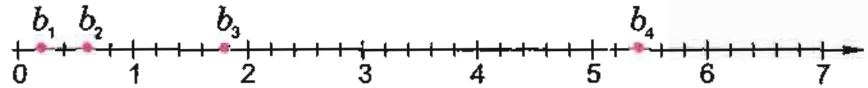


Рис. 77

В древнегреческом папирусе (XX в. до н. э.) обнаружена такая геометрическая прогрессия: 7, 49, 343, 2401, 16 807. Причем под этими числами соответственно подписаны слова: «лица», «кошки», «мыши», «ячмень», «мера». Эта запись истолковывается так: у 7 лиц есть по 7 кошек, каждая кошка съедает по 7 мышей, каждая мышь съедает по 7 колосьев ячменя, из каждого колоса может вырасти по 7 мер зерна.

1. Сформулируйте определение геометрической прогрессии. Приведите свои примеры геометрических прогрессий.
2*. Сформулируйте характеристическое свойство геометрической прогрессии.
3*. Сформулируйте признак геометрической прогрессии.
4. Укажите формулу n-го члена геометрической прогрессии.
5. Как можно установить, является ли числовая последовательность геометрической прогрессией?

Упражнения

3.53°. Найдите пятый и шестой члены геометрической прогрессии (b_n), если ее первые четыре члена следующие:

1) 4, 8, 16, 32;
2) 8, 24, 72, 216;
3) -5, 10, -20, 40;
4) -50, 10, -2, 0,4;
5) 3, 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$;
6) $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $-\frac{1}{16}$;
7) $\sqrt{2}$, 2, $2\sqrt{2}$, 4;
8) 5, $-5\sqrt{3}$, 15, $-15\sqrt{3}$;
9) -6, 6, -6, 6;
10) 1, 1, 1, 1.

3.54. Сравните с нулем члены геометрической прогрессии (b_n), если известно, что ее первый член отрицательный, а знаменатель:

1) положительный;
2) отрицательный.

3.55°. Напишите формулу n-го члена геометрической прогрессии, если ее первые три члена следующие:

1) $4, 20, 100$; 2) $3, 12, 48$;
3) $\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}$; 4) $1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}$;
5) $-3, 4, -\frac{16}{3}$; 6) $-4, -1, -\frac{1}{4}$;
7) $32, 16, 8$; 8) $2, -4, 8$.

3.56. В геометрической прогрессии (b_n) укажите $b_1, b_2, b_3, b_{n-1}, b_{n+1}$, если:

1) $b_n = 10 \cdot 2^{n-1}$; 2) $b_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$;
3) $b_n = 4 \cdot 5^{n+1}$; 4) $b_n = 2 \cdot 3^{n+1}$.

3.57°. Дана геометрическая прогрессия (b_n). Вычислите:

1) b_5, если $b_1 = 2$, $q = 6$;
2) b_7, если $b_1 = 4$, $q = \frac{1}{4}$;
3) b_8, если $b_1 = 1$, $q = -3$;
4) b_9, если $b_1 = -2$, $q = -\frac{1}{2}$;
5) b_{10}, если $b_1 = 3$, $q = -1$;
6) b_{12}, если $b_1 = -5$, $q = 1$;
7) b_6, если $b_1 = -1$, $q = \sqrt{2}$;
8) b_{11}, если $b_1 = 1$, $q = -\sqrt{2}$.

3.58. Найдите знаменатель q геометрической прогрессии (b_n), если:

1) $b_1 = 128$, $b_7 = 2$; 2) $b_1 = 2$, $b_5 = 162$;
3) $b_1 = 6$, $b_4 = -162$; 4) $b_1 = 125$, $b_9 = -1$.

3.59. 1) В геометрической прогрессии $5, 10, 20, \ldots$ найдите номер члена, равного 320.
2) В геометрической прогрессии $4, 12, 36, \ldots$ найдите номер члена, равного 972.
3) В геометрической прогрессии $-1, 2, -4, \ldots$ найдите номер члена, равного -256.
4) В геометрической прогрессии $-486, 162, -54, \ldots$ найдите номер члена, равного $-\frac{2}{3}$.

3.60. Укажите b_1, q и формулу n-го члена геометрической прогрессии (b_n), если:

1) $b_3 = 12$, $b_6 = 324$; 2) $b_5 = 24$, $b_8 = 192$;
3) $b_2 = 224$, $b_4 = 14$; 4) $b_3 = -54$, $b_6 = -2$.

3.61. Найдите b_5 в геометрической прогрессии (b_n), если:

1) $b_2 = \frac{1}{4}$, $b_7 = 16$; 2) $b_3 = -2$, $b_6 = -250$;
3) $b_2 = 6$, $b_4 = 1$; 4) $b_4 = -\frac{1}{4}$, $b_6 = -\frac{1}{64}$.

3.62*. Последовательность (b_n) задана формулой n-го члена. Докажите, что данная последовательность является геометрической прогрессией, и найдите b_1 и b_4, если:

1) $b_n = 7 \cdot 4^n$; 2) $b_n = 2 \cdot 5^{n-2}$;
3) $b_n = \frac{1}{4} \cdot 2^{n+1}$; 4) $b_n = -\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$.

3.63. Запишите первые пять членов геометрической прогрессии (b_n), если:

1) $b_1 = \frac{1}{5}$, $b_3 = 125$; 2) $b_2 = \frac{1}{6}$, $b_4 = \frac{25}{96}$;
3) $b_5 = 11$, $b_7 = 99$; 4) $b_6 = 100$, $b_8 = 9$.

3.64. Найдите седьмой член и знаменатель геометрической прогрессии (b_n), если:

1) $b_6 = 81$, $b_8 = \frac{1}{9}$; 2) $b_6 = 3$, $b_8 = 9$;
3) $b_6 = 243$, $b_8 = 27$; 4) $b_6 = 4$, $b_8 = 1$.

3.65. Найдите b_5 и b_1 в геометрической прогрессии (b_n), если:

1) $b_4 = 5$, $b_6 = 20$; 2) $b_4 = 16$, $b_6 = 9$;
3) $b_4 = 1458$, $b_6 = 729$; 4) $b_4 = 2$, $b_6 = 4$.

3.66. Найдите b_7 в геометрической прогрессии (b_n), если:

1) $b_2 = 3$, $b_4 = 27$; 2) $b_3 = 5$, $b_5 = 20$;
3) $b_4 = 5\frac{5}{8}$, $b_6 = 2\frac{1}{2}$; 4) $b_2 = 25$, $b_4 = 16$.

3.67. Найдите число t, если данные три числа являются последовательными членами геометрической прогрессии:

1) $\frac{1}{4}$, t, 4; 2) $\frac{1}{5}$, t, $\frac{1}{80}$; 3) -4, t, -100;
4) -5, t, -45; 5) -1, $-t$, -1; 6) 1, t, 1;
7) 2, t, 16; 8) 3, t, 24; 9) $\frac{1}{6}$, t, 96.

3.68. 1) Между числами $\frac{1}{5}$ и 25 вставьте два числа так, чтобы получились четыре последовательных члена геометрической прогрессии.

2) Между числами $\frac{1}{5}$ и 2000 вставьте три числа так, чтобы получились пять последовательных членов геометрической прогрессии.

3.69*. Является ли геометрической прогрессией числовая последовательность (b_n), если:

1) $b_n = \frac{2 \cdot 3^n}{3}$; 2) $b_n = \frac{4 \cdot 5^n}{5}$;
3) $b_n = 3 \cdot 2^n + 2$; 4) $b_n = 7 \cdot 4^n + 4$?

3.70*. Докажите, что:
1) если числовая последовательность (b_n) является геометрической прогрессией, то модуль каждого ее члена (начиная с $(k+1)$-го) равен среднему геометрическому двух членов, отстоящих от этого члена на k мест, т. е.

$$|b_n| = \sqrt{b_{n-k} \cdot b_{n+k}}.$$

2) если модуль каждого члена числовой последовательности (начиная с $(k+1)$-го) равен среднему геометрическому двух членов, отстоящих от этого члена на k мест, и не равен нулю, то эта последовательность является геометрической прогрессией ($k \in N$).

3.71*. Изобразите график геометрической прогрессии, у которой:

1) $b_1 = 2$, $q = 2$; 2) $b_1 = -3$, $q = 0{,}5$;
3) $b_1 = \frac{1}{2}$, $q = -3$; 4) $b_1 = -3$, $q = -2$;
5) $b_1 = 1$, $q = 5$; 6) $b_1 = -1$, $q = 4$;
7) $b_1 = -1$, $q = -6$; 8) $b_1 = 1$, $q = -3$.

3.5. Сумма n первых членов геометрической прогрессии

Сумму n первых членов геометрической прогрессии (b_n) будем обозначать S_n, т. е.

$$S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n.$$

Теорема 1. Для геометрической прогрессии (b_n) верны утверждения:
1) если $q = 1$, то $S_n = n \cdot b_1$;
2) если $q \neq 1$, то $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$.

Доказательство утверждения 1). Если $q = 1$, то

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = b_1 \cdot 1^{n-1} = b_1$$

и, значит,

$$S_n = \underbrace{b_1 + b_1 + \ldots + b_1}_{n \text{ раз}} = n \cdot b_1. \quad \boxtimes$$

Доказательство утверждения 2). Пусть $q \neq 1$. Имеем

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-1} + b_n. \quad (1)$$

Умножим обе части этого равенства на q. Учтя, что $b_k q = b_{k+1}$, получим

$$S_n q = b_2 + b_3 + b_4 + \ldots + b_n + b_n q. \quad (2)$$

Из (1) и (2) следует

$$S_n q - S_n = b_n q - b_1.$$

Откуда

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1}.$$

Воспользовавшись формулой n-го члена, получим:

$$S_n = \frac{b_1 q^n - b_1}{q - 1};$$

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}. \quad \boxtimes$$

Пример 1. Найти S_5 для геометрической прогрессии (b_n), если $b_n = 7(-2)^{n-1}$.

Решение. Из условия $b_1 = 7$; $b_2 = -14$. Поскольку $b_2 = b_1 \cdot q$, то $q = \frac{-14}{7} = -2$. По формуле для S_n находим:

$$S_5 = \frac{b_1(q^5 - 1)}{q - 1} = \frac{7((-2)^5 - 1)}{-2 - 1} = \frac{7(-33)}{-3} = 77.$$

Ответ: $S_5 = 77$.

С давних времен известны задачи и легенды, связанные с неправдоподобной на первый взгляд скоростью роста геометрической прогрессии $b_n = 2^n$. Вот одна из наиболее известных легенд.

Индийский царь Шерам призвал к себе изобретателя шахмат по имени Сета и предложил, чтобы он сам назначил для себя награду за создание мудрой игры. Сета попросил выдать ему за первую клетку шахматной доски 1 пшеничное зерно, за вторую — 2, за третью — 4, за четвертую — 8, за пятую — 16 и т. д. Царя изумила скромность просьбы Сета. Но, как оказалось, Шерам не смог выполнить ее — во всем царстве не хватило зерен, чтобы отдать нужное количество. Сета должен был получить $S_{64} = 2^{64} - 1$ (ведь $b_1 = 1$, $q = 2$) зерен, а это число равно

18 446 744 073 709 551 615.

Эта задача привлекла внимание русского писателя Л. Н. Толстого. Он вычислил, что если полагать в одном пуде зерна (16 кг = 1 пуд) 40 000 зерен, то только за 64-ю клетку надо отдать

230 584 300 921 369 пудов.

Определите, сколько это тонн.

Дальнейшие расчеты показывают, что с учетом возможности разместить в одном вагоне поезда 60 т зерна понадобится поезд, длина которого превосходит длину экватора Земли (а это — 40 000 км) более чем в 30 000 раз!

Теорема 2. Пусть $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$ — первые n членов геометрической прогрессии и p — натуральное число, $1 \leqslant p \leqslant n - 1$. Тогда верно равенство

$$b_{1+p} \cdot b_{n-p} = b_1 \cdot b_n. \qquad (3)$$

Доказательство. Преобразуем левую часть равенства (3), используя формулу n-го члена геометрической прогрессии:

$$b_{1+p} \cdot b_{n-p} = b_1 \cdot q^{1+p-1} \cdot b_1 \cdot q^{n-p-1} = b_1^2 \cdot q^{p+(n-p-1)} = b_1^2 \cdot q^{n-1}.$$

Преобразуем правую часть равенства (3), используя формулу n-го члена геометрической прогрессии:

$$b_1 \cdot b_n = b_1 \cdot b_1 \cdot q^{n-1} = b_1^2 \cdot q^{n-1}. \ \boxtimes$$

О любых первых n членах геометрической прогрессии говорят, что они образуют ***конечную геометрическую прогрессию***. Первый и n-й члены этой прогрессии называются ее ***концами (крайними членами)***. При этом равенство (3) читается так:

в конечной геометрической прогрессии произведения членов, равноотстоящих от ее концов, равны произведению крайних членов.

Пример 2. Найти десятый член геометрической прогрессии (b_n), если известно, что

$$b_1 \cdot b_{13} = 256 \text{ и } b_4 = 2.$$

Решение. По формуле n-го члена геометрической прогрессии запишем

$$b_1 \cdot b_{13} = b_1 \cdot b_1 \cdot q^{12} = b_1^2 \cdot q^{12},$$
$$b_4 = b_1 q^3.$$

Согласно условию, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} b_1^2 q^{12} = 256, \\ b_1 q^3 = 2. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим $q^6 = 64$, откуда $q = -2$ или $q = 2$. Соответственно, $b_1 = -\frac{1}{4}$ или $b_1 = \frac{1}{4}$.

Таким образом,

$$b_{10} = b_1 q^9 = -\frac{1}{4} \cdot (-2)^9 = 2^7 = 128$$

или

$$b_{10} = b_1 \cdot q^9 = \frac{1}{4} \cdot 2^9 = 2^7 = 128.$$

Ответ: $b_{10} = 128$.

Можно решить пример 2 иначе, если заметить, что $b_4 = b_{1+3}$ и $b_{10} = b_{13-3}$. Тогда по формуле (3) из теоремы 2 получим

$$b_1 \cdot b_{13} = b_{1+3} \cdot b_{13-3}, \text{ т. е. } b_1 \cdot b_{13} = b_4 \cdot b_{10}.$$

Из последнего равенства и из условия имеем $256 = 2 \cdot b_{10}$, значит, $b_{10} = 128$.

1. Как обозначается сумма n первых членов геометрической прогрессии?
2. Сформулируйте свойство членов конечной геометрической прогрессии, равноудаленных от ее концов.
3. Как образуется конечная геометрическая прогрессия?
4. По каким формулам можно вычислить сумму n первых членов геометрической прогрессии?

Упражнения

3.72°. Найдите сумму n первых членов геометрической прогрессии, если:

1) $b_1 = \frac{1}{3}$, $q = 2$, $n = 6$;
2) $b_1 = \frac{1}{2}$, $q = -2$, $n = 6$;
3) $b_1 = 1$, $q = \frac{1}{5}$, $n = 5$;
4) $b_1 = 10$, $q = -\frac{1}{5}$, $n = 5$;
5) $b_1 = 5$, $q = -1$, $n = 9$;
6) $b_1 = -4$, $q = 1$, $n = 200$.

3.73°. Найдите сумму n первых членов геометрической прогрессии:

1) 5, 10, 20, ... при $n = 6$;
2) 2, 6, 18, ... при $n = 7$;
3) $-\frac{3}{5}$, 3, -15, ... при $n = 6$;
4) $\frac{2}{3}$, -2, 6, ... при $n = 7$;
5) 162, 54, 18, ... при $n = 7$;
6) 128, 64, 32, ... при $n = 6$;
7) $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, ... при $n = 6$;
8) $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{8}$, ... при $n = 8$.

3.74°. Найдите сумму:

1) $1 + 2 + 4 + \ldots + 256$;
2) $1 + 3 + 9 + \ldots + 729$;
3) $243 + 81 + 27 + \ldots + \frac{1}{27}$;
4) $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{512}$.

3.75. Найдите b_8 и S_{10} геометрической прогрессии (b_n), если:

1) $b_2 = 9$, $b_3 = 27$;
2) $b_3 = 5$, $b_4 = 15$;
3) $b_2 = 14$, $b_4 = 686$, $q < 0$;
4) $b_2 = 11$, $b_3 = 55$;
5) $b_1 \cdot b_{12} = 128$ и $b_5 = 4$;
6) $b_1 \cdot b_{13} = 729$ и $b_6 = 9$;
7) $b_1 \cdot b_{14} = 729$ и $b_7 = 27$;
8) $b_1 \cdot b_{11} = 256$ и $b_4 = 16$.

3.76. Найдите число членов конечной геометрической прогрессии (b_n), если:

1) $b_1 = 3$, $b_n = 96$, $S_n = 189$;
2) $b_1 = 1$, $b_n = -512$, $S_n = -341$;
3) $q = 3$, $b_n = 567$, $S_n = 847$;
4) $q = 2$, $b_n = 96$, $S_n = 189$.

3.77. Дана геометрическая прогрессия (b_n). Найдите:

1) b_1 и b_7, если $q = 2$, $n = 7$, $S_n = 635$;
2) b_1 и b_8, если $q = -2$, $n = 8$, $S_n = 85$;
3) n и b_n, если $q = 2$, $b_1 = 8$, $S_n = 4088$;
4) n и b_n, если $q = 3$, $b_1 = 7$, $S_n = 847$;
5) b_1 и q, если $b_3 = 135$, $n = 3$, $S_3 = 193$;
6) b_1 и q, если $b_3 = 8$, $n = 3$, $S_3 = 14$.

3.78*. Геометрическая прогрессия задана формулой n-го члена. Найдите S_n, если:

1) $b_n = 5 \cdot 2^{n-1}$, $n = 8$;
2) $b_n = 4 \cdot 3^{n-1}$, $n = 4$;
3) $b_n = 4\left(-\frac{1}{3}\right)^n$, $n = 3$;
4) $b_n = -2\left(\frac{1}{2}\right)^n$, $n = 6$.

3.79*. Для геометрической прогрессии (b_n) найдите:

1) q, если $b_1 = 1$ и $b_3 + b_5 = 90$;
2) q, если $b_1 = 3$ и $b_7 - b_4 = 168$;
3) S_8, если $b_1 - b_3 = 15$ и $b_2 - b_4 = 30$;
4) S_{14}, если $b_3 - b_1 = 24$ и $b_5 - b_1 = 624$.

3.80*. 1) Запишите конечную геометрическую прогрессию, состоящую из 6 членов, зная, что сумма трех первых ее членов равна 156, а сумма трех последних равна 4212.
2) Запишите конечную геометрическую прогрессию, состоящую из 4 членов, зная, что сумма крайних ее членов равна 9360, а сумма средних членов равна 2880.

▲ 3.6. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

Определение. Геометрическая прогрессия со знаменателем q, удовлетворяющим условию $|q| < 1$, называется *бесконечно убывающей*.

Приведем примеры бесконечно убывающих геометрических прогрессий.

Пример 1. Последовательность

$$2,\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3^2},\ \frac{2}{3^3},\ \ldots,\ \frac{2}{3^{n-1}},\ \ldots$$

является бесконечно убывающей геометрической прогрессией с первым членом $b_1 = 2$ и знаменателем $q = \frac{1}{3}$.

Пример 2. Последовательность

$$-4,\ 2,\ -1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2^2},\ \ldots,\ \frac{1}{(-2)^{n-2}},\ \ldots$$

является бесконечно убывающей геометрической прогрессией с первым членом $b_1 = -4$ и знаменателем $q = -\frac{1}{2}$ (здесь $|q| = \left|-\frac{1}{2}\right| < 1$).

Изобразим четыре первых члена геометрической прогрессии из примера 1 на координатной прямой (рис. 78).

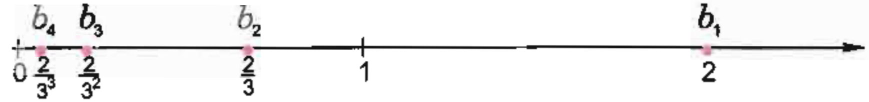


Рис. 78

Мы видим, что, чем больше номер члена прогрессии, тем ближе этот член к нулю, т. е. тем меньше его модуль, и с увеличением n этот модуль становится меньше любого заданного положительного числа.

Например, если мы зададим число 0,01, то

$$\left|\frac{2}{3^5}\right| = \left|\frac{2}{243}\right| < 0{,}01 \text{ и } \left|\frac{1}{3^{n-1}}\right| \leqslant 0{,}01 \text{ при любом } n \geqslant 6.$$

Изобразим 6 первых членов геометрической прогрессии из примера 2 на координатной прямой (рис. 79).

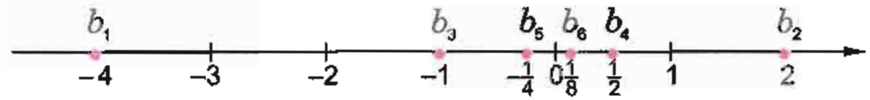


Рис. 79

И в этом примере мы видим, что, чем больше номер члена прогрессии, тем ближе этот член к нулю, т. е. тем меньше его модуль, и с увеличением n этот модуль становится меньше любого заданного положительного числа.

Например, если мы зададим число 0,001, то

$$\left|\frac{1}{(-2)^{10}}\right| = \frac{1}{1024} < 0{,}001 \text{ и } \left|\frac{1}{(-2)^{n-2}}\right| < 0{,}001 \text{ при любом } n \geqslant 12.$$

! Такую же картину, как в этих двух примерах, мы наблюдаем *в любой бесконечно убывающей геометрической прогрессии* (b_n)*: чем больше номер n члена прогрессии* (b_n)*, тем меньше* $|b_n|$*, и с увеличением n этот модуль становится меньше любого заданного положительного числа.*

Это утверждение формулируется еще и так:

! *b_n стремится к нулю при n, стремящемся к бесконечности.*

Заметим, что если $|q| < 1$, то $|q|^n$ стремится к нулю при n, стремящемся к бесконечности.

Рассмотрим бесконечно убывающую геометрическую прогрессию с первым членом b_1 и знаменателем q.

Запишем по формуле сумму первых n членов этой прогрессии и преобразуем это выражение:

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{b_1 - b_1q^n}{1-q} = \frac{b_1}{1-q} - \frac{b_1}{1-q}\cdot q^n.$$

Обозначим

$$S = \frac{b_1}{1-q}.$$

Тогда получим

$$|S - S_n| = \left|\frac{b_1}{1-q} - \left(\frac{b_1}{1-q} - \frac{b_1}{1-q}\cdot q^n\right)\right| = \left|\frac{b_1}{1-q}\right|\cdot|q|^n.$$

Так как $|q| < 1$, то $\left|\frac{b_1}{1-q}\right|\cdot|q|^n$ стремится к нулю при n, стремящемся к бесконечности. Значит, $|S - S_n|$ стремится к нулю при n, стремящемся к бесконечности, т. е. чем больше число n (чем больше слагаемых в сумме S_n), тем меньше разница между S и S_n. Поэтому число S называют ***суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии***.

Пример 3. Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

а) $2,\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3^2},\ \ldots,\ \frac{2}{3^{n-1}},\ \ldots;$

б) $-4,\ 2,\ -1,\ \frac{1}{2},\ \ldots,\ \frac{1}{(-2)^{n-2}},\ \ldots.$

Решение. а) $S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{2}{1-\frac{1}{3}} = \frac{2}{\frac{2}{3}} = 3;$

б) $S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{-4}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{-4}{\frac{3}{2}} = \frac{-4\cdot 2}{3} = \frac{-8}{3} = -2\frac{2}{3}.$

Ответ: а) $S = 3$; б) $S = -2\frac{2}{3}$.

?

1. Какая геометрическая прогрессия называется бесконечно убывающей?
2. Как понимать утверждение «b_n стремится к нулю при n, стремящемся к бесконечности»?
3. Как найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии?

Упражнения

3.81. Докажите, что данная геометрическая прогрессия является бесконечно убывающей:

1) $1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \ldots;$ 2) $\frac{1}{3};\ \frac{1}{9};\ \frac{1}{27};\ \ldots;$

3) $-81;\ -27;\ -9;\ \ldots;$ 4) $-125;\ -25;\ -5;\ \ldots;$

5) $\frac{1}{2};\ -\frac{1}{4};\ \frac{1}{8};\ \ldots;$ 6) $-\frac{1}{4};\ \frac{1}{16};\ -\frac{1}{64};\ \ldots.$

3.82. Является ли геометрическая прогрессия (b_n) бесконечно убывающей геометрической прогрессией, если:

1) $b_1 = 80$ и $b_{10} = -40$; 2) $b_7 = 24$ и $b_{11} = \frac{3}{4}$;

3) $b_5 = 30$ и $b_4 = 15$; 4) $b_6 = -9$ и $b_{12} = \frac{1}{27}$;

5) $b_3 = 0{,}01$ и $b_8 = -10$; 6) $b_9 = -0{,}04$ и $b_{13} = -0{,}64$;

7) $b_{20} = \frac{1}{9}$ и $b_{19} = \frac{1}{3}$; 8) $b_{22} = -\frac{1}{16}$ и $b_{21} = \frac{1}{8}$?

Найдите сумму S бесконечно убывающей геометрической прогрессии (3.83—3.84).

3.83. 1) $1;\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{16};\ \ldots;$ 2) $5;\ 1;\ \frac{1}{5};\ \ldots;$

3) $-49;\ -7;\ -1;\ \ldots;$ 4) $-8;\ -1;\ -\frac{1}{8};\ \ldots;$

5) $\frac{1}{3};\ -\frac{1}{9};\ \frac{1}{27};\ \ldots;$ 6) $-1;\ \frac{1}{6};\ -\frac{1}{36};\ \ldots.$

3.84. 1) $3\sqrt{2};\ \sqrt{2};\ \frac{\sqrt{2}}{3};\ \ldots;$

2) $\sqrt{\frac{3}{2}};\ \sqrt{\frac{2}{3}};\ \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}};\ \ldots;$

3) $\sqrt{5};\ \sqrt{\frac{1}{5}};\ \frac{1}{25}\sqrt{5};\ \ldots;$

4) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1};\ 1;\ \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1};\ \ldots.$

3.85. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии (b_n), если:

1) $b_3 = \frac{1}{8}$, $q = \frac{1}{2}$; 2) $b_5 = \frac{1}{9}$, $q = \frac{1}{3}$;

3) $b_7 = \frac{1}{81}$, $q = \frac{1}{3}$; 4) $b_6 = -\frac{1}{8}$, $q = -\frac{1}{2}$;

5) $b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $q = \frac{1}{\sqrt{3}}$; 6) $b_1 = \sqrt{2}$, $q = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

3.86. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии (b_n), если:

1) $b_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$; 2) $b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$;

3) $b_n = \frac{6}{2^{n-1}}$; 4) $b_n = \frac{(-1)^n}{3^n}$.

3.87. Число 150 является суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии (b_n). Задайте прогрессию формулой n-го члена, если:

1) $q = \frac{1}{5}$; 2) $q = -\frac{1}{3}$; 3) $b_1 = 75$; 4) $b_1 = 50$.

3.88*. Числовая последовательность (b_n) задана рекуррентной формулой. Верно ли, что (b_n) является бесконечно убывающей геометрической прогрессией, если:

1) $b_{n+1} = \frac{7}{2} b_n$; 2) $b_n = \frac{3}{4} b_{n-1}$;

3) $b_{n-1} = 3^{-1} b_{n-2}$; 4) $b_{n-2} = 7b_{n-3}$?

3.89*. Найдите сумму:

1) $\frac{2}{5} + \frac{3}{5^2} + \frac{2}{5^3} + \frac{3}{5^4} + \ldots$;

2) $\frac{3}{7} + 1 + \frac{9}{49} + \frac{1}{3} + \frac{27}{243} + \frac{1}{9} + \ldots$.

3.90. 1) Дан квадрат с диагональю, равной a. Сторона квадрата является диагональю второго квадрата, сторона второго квадрата — диагональю нового квадрата и т. д. Найдите сумму площадей всех квадратов.

2) В круг, радиус которого равен R, вписан квадрат, в квадрат вписан круг, в этот круг вписан второй квадрат и т. д. Найдите сумму площадей всех кругов и сумму площадей всех квадратов.

▲ 3.7. Периодические дроби

Напомним, что любое рациональное число $\frac{k}{n}$ $(k \in Z,\ n \in N)$ можно представить в виде десятичной дроби.

Обыкновенные дроби переводят в десятичные делением «уголком». Например (см. «Алгебра 8», п. 3.12),

$$\frac{19}{11} = 1{,}727272\ \ldots\ .$$

Рассмотрим еще один пример. Обратим обыкновенную дробь $\frac{239}{74}$ в десятичную (рис. 80). Таким образом,

$$\frac{239}{74} = 3{,}2297297\ldots\ .$$

Периодически повторяющаяся группа цифр в записи десятичной дроби называется ***периодом дроби***, ее заключают в скобки и пишут 3,2(297). (Читается: «Три целые, две десятые, двести девяноста семь в периоде».) Количество цифр в периоде дроби называется ***длиной периода***; в нашем примере она равна 3.

Легко заметить, что процесс деления «уголком», которым мы пользуемся для представления обыкновенной дроби $\frac{k}{n}$ в виде десятичной,— это повторяемые вновь и вновь умножение очередного остатка на 10 и деление полученного произведения на n. Но при делении на n остатками могут быть только числа 0, 1, 2, ..., $n - 1$. Значит, не позже чем на n-м шаге остаток повторится, а тогда начнут повторяться и цифры в частном. Можно сказать, что с этого момента действие деления зацикливается*. Таким образом,

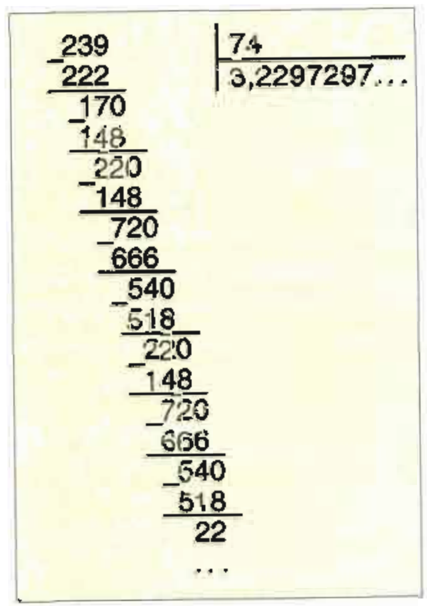


Рис. 80

* Слово «цикл» происходит от греческого слова *kyklos*, что означает круг.

! *десятичное представление дроби $\frac{k}{n}$ — это периодическая десятичная дробь, длина периода которой не превосходит $n-1$.*

Каждую периодическую десятичную дробь можно рассматривать либо как сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, либо как сумму конечной десятичной дроби и сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Это позволяет представлять периодические десятичные дроби в виде обыкновенных дробей.

Пример 1. Обратить в обыкновенную дробь число:
а) 0,(7); б) 3,4(12).

Решение. а) $0,(7) = 0,7777\ldots =$
$$= 0,7 + 0,07 + 0,007 + 0,0007 + \ldots =$$
$$= 0,7 + 0,7\cdot 0,1 + 0,7\cdot 0,01 + 0,7\cdot 0,001 + \ldots =$$
$$= 0,7 + 0,7\cdot 0,1 + 0,7\cdot 0,1^2 + 0,7\cdot 0,1^3 + \ldots .$$

Таким образом, число 0,(7) есть S — сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии (b_n), где $b_1 = 0,7$, $q = 0,1$ ($|q| < 1$).

Значит, $0,(7) = S = \frac{0,7}{1-0,1} = \frac{0,7}{0,9} = \frac{7}{9}$.

Ответ: $0,(7) = \frac{7}{9}$.

б) $3,4(12) = 3,41212121212\ldots = 3,4 + 0,012 + 0,00012 + 0,0000012 + 0,000000012 + \ldots = 3,4 + (0,012 + 0,012\cdot 0,01 + 0,012\cdot 0,01^2 + 0,012\cdot 0,01^3 + \ldots)$.

Сумму, стоящую в скобках, обозначим буквой S. Тогда $S = 0,0(12)$ — есть сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = 0,012$ и знаменателем $q = 0,01$.

Найдем S:
$$S = 0,0(12) = \frac{0,012}{1-0,01} = \frac{0,012}{0,99} = \frac{12}{990} = \frac{4}{330} = \frac{2}{165}.$$

Значит,
$$3,4(12) = 3,4 + 0,0(12) = 3,4 + \frac{2}{165} = 3 + \frac{2}{5} + \frac{2}{165} =$$
$$= 3 + \frac{2\cdot 33 + 2\cdot 1}{165} = 3 + \frac{68}{165} = 3\frac{68}{165}.$$

Ответ: $3,4(12) = 3\frac{68}{165}$.

Изучением периодических дробей занимался великий немецкий математик К. Ф. Гаусс (1777 — 1855). Уже в детстве он делил единицу на все подряд простые числа p из первой тысячи. При этом Гаусс подметил, что, начиная с какого-то места, десятичные знаки начинают повторяться, т. е. получаются периодические десятичные дроби. А периоды некоторых дробей достигали нескольких сотен десятичных знаков. Рассматривая эти примеры, Гаусс установил, что число цифр в периоде всегда является делителем числа $p-1$.

Пример 2. Найти значение выражения:
а) $3,(7) + 4,(3)$; б) $\frac{3,4(12) - 3,4(11)}{1,(12)}$.

Решение. Используем результаты примера 1 (или правило обращения периодической дроби в обыкновенную):

а) $3,(7) + 4,(3) = 3\frac{7}{9} + 4\frac{3}{9} = 7\frac{10}{9} = 8\frac{1}{9}$;

б) $$\frac{3,4(12) - 3,4(11)}{1,(12)} = \frac{3,4 + \frac{12}{990} - 3,4 - \frac{11}{990}}{1 + \frac{12}{99}} = \frac{1}{990} : \frac{111}{99} =$$
$$= \frac{1\cdot 99}{990\cdot 111} = \frac{1}{1110}.$$

Ответ: а) $8\frac{1}{9}$; б) $\frac{1}{1110}$.

?
1. Какое число называют рациональным?
2. Как обыкновенную дробь переводят в десятичную?
3. Что называется периодом в записи периодической десятичной дроби?
4. Почему в десятичном представлении дроби $\frac{k}{n}$ ($k \in Z$, $n \in N$) длина периода не превосходит $n-1$?
5. Как связаны периодическая десятичная дробь и бесконечно убывающая геометрическая прогрессия?

Упражнения

3.91°. Найдите сотую цифру после запятой в десятичной записи числа:

1) $\frac{1}{7}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{4}{9}$; 4) $\frac{3}{7}$; 5) $\frac{5}{13}$; 6) $\frac{9}{23}$.

3.92°. Разделите «уголком» число 1 на:

1) 9; 2) 99; 3) 999; 4) 9999; 5) 99 999; 6) 999 999.

3.93*. Докажите, что: $\frac{1}{\underbrace{99\ldots9}_{n\text{ раз}}} = 0,\underbrace{(00\ldots01)}_{n-1\text{ раз}}$.

3.94°. Представьте обыкновенную дробь в виде десятичной:

1) $\frac{7}{9}$; 2) $\frac{5}{9}$; 3) $\frac{44}{99}$;

4) $\frac{77}{99}$; 5) $\frac{55555}{99999}$; 6) $\frac{444444}{999999}$.

3.95. Представьте число в виде обыкновенной дроби:

1) 6,(11); 2) 3,(24); 3) 17,4(7); 4) 31,5(4);
5) 8,23(41); 6) 9,12(47); 7) 0,(423); 8) 0,(451).

Выполните действия (3.96—3.97).

3.96. 1) 0,(23) + 0,(43); 2) 2,2(7) − 0,47(2);
3) 5,0(8) − 4,1(6); 4) 0,42(6) + 0,12(3).

3.97. 1) $\frac{0,8(3)-0,4(6)}{1,8(3)}$;

2) (10,(6) − 5,(3)) : 3,(3);

3) $\frac{(0,(6)+0,(3)):0,25}{0,12(3):0,0925}$;

4) $\frac{(1,25:0,(18)-1,25:0,(3)):0,3(3)}{5,(3)+0,291(6)}$.

3.98*. Докажите, что сумма (произведение, разность) двух периодических десятичных дробей также является периодической десятичной дробью.

▲ 3.8. Задачи на арифметическую и геометрическую прогрессии

Пример 1. Сумма первых четырех членов геометрической прогрессии равна 120. Известно, что ее второй, третий и четвертый члены различны и являются соответственно первым, пятым и седьмым членами арифметической прогрессии. Найти первый член геометрической прогрессии и первый член арифметической прогрессии.

Решение. Пусть (a_n) — арифметическая прогрессия с разностью d, а (b_n) — геометрическая прогрессия со знаменателем q. Тогда по условию имеем: $S_4 = \frac{b_1(q^4-1)}{q-1} = 120$, $a_1 = b_2$, $a_5 = b_3$, $a_7 = b_4$. Использовав формулы n-го члена арифметической и n-го члена геометрической прогрессий, получим систему уравнений

$$\begin{cases} b_1(q^2+1)(q+1) = 120, \\ a_1 = b_1q, \\ a_1 + 4d = b_1q^2, \\ a_1 + 6d = b_1q^3. \end{cases}$$

Заменив в 3-м и 4-м уравнениях a_1 на b_1q и выразив из них d, получим

$$\begin{cases} b_1(q^3+q^2+q+1) = 120, \\ a_1 = b_1q, \\ d = \frac{b_1q^2-b_1q}{4}, \\ d = \frac{b_1q^3-b_1q}{6}. \end{cases} \quad (1)$$

Приравняв правые части двух последних равенств, получим новое уравнение, обе части которого можно разделить на $\frac{b_1q}{2}$. После чего имеем

$$\frac{q-1}{2} = \frac{q^2-1}{3}, \text{ т. е. } 2q^2 - 3q + 1 = 0.$$

Решив это уравнение, получим

$$q = \frac{1}{2} \text{ или } q = 1.$$

Поскольку по условию члены геометрической прогрессии различны, то $q = \frac{1}{2}$.

Из первого уравнения системы (1) находим

$$b_1 = \frac{120}{\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1} = \frac{120\cdot8}{1+2+4+8} = \frac{120\cdot8}{15} = 64.$$

Из второго уравнения системы (1) находим:

$$a_1 = 64 \cdot \frac{1}{2} = 32.$$

Ответ: $b_1 = 64$; $a_1 = 32$.

Пример 2. Существуют ли такие три различных положительных числа, которые одновременно образуют арифметическую и геометрическую прогрессии?

Решение. Пусть m_1, m_2, m_3 — различные положительные числа, которые являются последовательными членами арифметической и геометрической прогрессий. Тогда верны равенства

$$m_2 = \frac{m_1 + m_3}{2} \text{ и } m_2 = \sqrt{m_1 m_3}$$

(поясните почему). Приравняв правые части этих равенств, имеем верное равенство

$$\frac{m_1 + m_3}{2} = \sqrt{m_1 m_3},$$

откуда получаем $m_1 + m_3 - 2\sqrt{m_1 m_3} = 0$, т. е. $(\sqrt{m_1} - \sqrt{m_3})^2 = 0$, и, значит, $m_1 = m_3$. Но это противоречит условию. Значит, такие числа не существуют.

Ответ: не существуют.

С использованием формул n-го члена арифметической и n-го члена геометрической прогрессий связаны расчеты при решении различных практических задач. Рассмотрим, например, задачи о банковских вкладах — депозитах*.

Каждый вкладчик при хранении денег в банке ежемесячно (ежеквартально или ежегодно) получает от банка вознаграждение: годовые проценты, начисленные на сумму вклада. При этом годовые проценты могут начисляться на депозит двумя способами: либо с их последующей капитализацией, либо без их капитализации.

При *капитализации* ежемесячно (ежеквартально или ежегодно) происходит начисление процентов на сумму вклада, включая и ранее начисленные по нему проценты, т. е. проценты начисляются на всю накопленную сумму. А *без капитализации* начисление процентов происходит только на сумму исходного вклада без включения в нее ранее начисленных процентов.

* Депозит (от латинского слова *depositum* — вещь, отданная на хранение) — вклад — денежные средства или ценные бумаги (акции, облигации), помещаемые для хранения в банк.

Пример 3. Буратино положил k золотых в банк «Шанс» под p % годовых без их капитализации. Сколько золотых будет на счету Буратино через 2 года? через 5 лет? через n лет?

Решение. По условию ежегодно вклад увеличивается на p % от исходной суммы. Пусть исходная сумма $K_0 = k$. Через год на счету Буратино будет сумма:

$$K_1 = k + k\frac{p}{100} = k + \frac{kp}{100}.$$

Через 2 года на счету будет сумма:

$$K_2 = k + k\frac{p}{100} + k\frac{p}{100} = k + 2\frac{kp}{100}.$$

Через 3 года сумма вклада будет следующей:

$$K_3 = k + k\frac{p}{100} + k\frac{p}{100} + k\frac{p}{100} = k + 3\frac{kp}{100}.$$

Аналогично через 4 года и через 5 лет получим:

$$K_4 = k + 4\frac{kp}{100} \text{ и } K_5 = k + 5\frac{kp}{100}.$$

Очевидно, что через n лет Буратино получит сумму:

$$K_n = k + n\frac{kp}{100}. \quad (1)$$

Ответ: $K_2 = k + 2\frac{kp}{100}$, $K_5 = k + 5\frac{kp}{100}$, $K_n = k + n\frac{kp}{100}$.

Нетрудно заметить, что числа K_0, K_1, K_2, ..., K_n образуют арифметическую прогрессию (a_n), где $a_1 = k$ и $d = \frac{kp}{100}$.

Формулу (1) называют ***формулой простых процентов*** — по ней можно рассчитать, какой будет сумма вклада, положенного в банк на n лет под p % годовых без их капитализации. Пользуясь этой формулой, узнайте, сколько золотых получит Буратино через 2 года в банке «Шанс», положив туда 25 золотых под 20 % годовых.

Пример 4. Мальвина положила k золотых в банк «Фортуна» под p % годовых с их последующей ежегодной капитализацией. Сколько золотых будет на счету Мальвины через 2 года? через 5 лет? через n лет?

Решение. По условию ежегодно вклад увеличивается на p % от накопленной суммы. Пусть исходная сумма $K_0 = k$. Через год на счету Мальвины будет накоплена сумма:

$$K_1 = k + k\frac{p}{100} = k\left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

Через 2 года на счету будет сумма:

$$K_2 = k\left(1 + \frac{p}{100}\right) + k\left(1 + \frac{p}{100}\right)\frac{p}{100} = k\left(1 + \frac{p}{100}\right)\left(1 + \frac{p}{100}\right) = k\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2.$$

Через 3 года сумма вклада будет следующей:

$$K_3 = k\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 + k\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2\frac{p}{100} = k\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2\left(1 + \frac{p}{100}\right) = k\left(1 + \frac{p}{100}\right)^3.$$

Аналогично через 4 года и через 5 лет получим:

$$K_4 = k\left(1 + \frac{p}{100}\right)^4 \text{ и } K_5 = k\left(1 + \frac{p}{100}\right)^5.$$

Очевидно, что через n лет Мальвина получит сумму:

$$K_n = k\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n. \qquad (2)$$

Ответ: $K_2 = k\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$, $K_5 = k\left(1 + \frac{p}{100}\right)^5$, $K_n = k\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$.

Нетрудно заметить, что числа $K_0, K_1, K_2, \ldots, K_n$ образуют геометрическую прогрессию (b_n), где $b_1 = k$ и $q = 1 + \frac{p}{100}$.

Формулу (2) называют ***формулой сложных процентов*** — по ней можно рассчитать, какой будет сумма вклада, положенного в банк на n лет под p % годовых с их последующей ежегодной капитализацией. Пользуясь этой формулой, узнайте, сколько золотых получит Мальвина через 2 года в банке «Фортуна», положив туда 25 золотых под 20 % годовых.

В каком банке — «Шанс» или «Фортуна» — выгоднее хранить деньги?

Пример 5*. В банках A, B и C вклады от населения принимаются соответственно под 12 %, 14 % и 15 % годовых. При этом начисление процентов и их последующая капитализация производятся в банке A ежеквартально, в банке B — каждые полгода, а в банке C — ежегодно. В какой из банков выгоднее положить 1 000 000 р. сроком на 1 год?

Решение. Для ответа на этот вопрос надо сравнить значения следующих выражений (поясните, как они получены):

$$S_A = 1\,000\,000\,(1 + 0{,}03)^4;$$
$$S_B = 1\,000\,000\,(1 + 0{,}07)^2;$$
$$S_C = 1\,000\,000\,(1 + 0{,}15).$$

Вычисления показывают, что наиболее выгодными являются условия хранения денег в банке A (убедитесь в этом).

Ответ: в банк A.

А в каком из банков прибыль будет наименьшей?

?

1. Какую формулу называют формулой простых процентов?
2. Какую формулу называют формулой сложных процентов?
3*. Докажите, что не существует числовой последовательности (a_n) с различными членами, которая одновременно является и арифметической, и геометрической прогрессией.

Упражнения

3.99. В арифметической прогрессии 11 различных членов. Первый, пятый и одиннадцатый члены составляют геометрическую прогрессию. Найдите все члены арифметической прогрессии, если ее первый член равен 24.

3.100. Первый член арифметической прогрессии (a_n) равен 1, а сумма ее первых семи членов равна 91. Найдите десятый член геометрической прогрессии (b_n), если $a_1 = b_1$ и $a_7 = b_7$.

3.101. Задайте формулой n-го члена арифметическую и геометрическую прогрессии, если известно, что разность арифметической прогрессии отлична от нуля, первый член каждой прогрессии равен 2, третьи члены обеих прогрессий равны между собой, а одиннадцатый член арифметической прогрессии равен пятому члену геометрической.

3.102. Первый член арифметической прогрессии с неравными членами и первый член геометрической прогрессии равны 3. Второй член арифметической прогрессии больше второго члена геометрической на 6, а третьи члены прогрессий одинаковы. Задайте эти прогрессии формулами n-го члена.

3.103. Три различных числа a, b, c, сумма которых равна 52, являются тремя последовательными членами геометрической прогрессии. Одновременно эти три числа a, b, c являются соответственно четвертым, шестым и двенадцатым членами арифметической прогрессии. Найдите числа a, b, c.

3.104. Три различных числа a, b, c, сумма которых равна 147, являются тремя последовательными членами геометрической прогрессии. Одновременно эти три числа a, b, c являются соответственно третьим, десятым и тридцать восьмым членами арифметической прогрессии. Найдите числа a, b, c.

3.105. Сумма пяти первых членов геометрической прогрессии равна 62. Известно, что пятый, восьмой и одиннадцатый члены этой прогрессии различны и являются соответственно первым, вторым и десятым членами арифметической прогрессии. Найдите первый член геометрической прогрессии.

3.106. Числа b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, сумма которых равна 62, являются первыми пятью членами геометрической прогрессии, а числа b_3, $1{,}25b_4$, b_5 — последовательными членами арифметической прогрессии. Найдите первый член и знаменатель геометрической прогрессии.

3.107. Сумма трех чисел, составляющих арифметическую прогрессию, равна 33. Если к первому члену прибавить 1, к третьему 2, а от второго отнять 1, то полученные числа составят геометрическую прогрессию. Найдите эти числа.

3.108. Сумма трех чисел, составляющих арифметическую прогрессию, равна 21. Если к ним соответственно прибавить 2, 3 и 9, то полученные числа составят геометрическую прогрессию. Найдите эти числа.

3.109. Сумма трех чисел, составляющих геометрическую прогрессию, равна 65. Если от меньшего из этих чисел отнять 1, а от большего 19, то полученные числа составят арифметическую прогрессию. Найдите эти числа.

3.110. Найдите четыре числа, из которых первые три составляют арифметическую, а последние три — геометрическую прогрессии, если сумма двух крайних чисел равна 22, а сумма двух средних чисел равна 20.

3.111*. Три числа составляют геометрическую прогрессию. Если ко второму числу прибавить 8, то эти числа составят арифметическую прогрессию. Если затем к третьему числу прибавить 64, то полученные числа вновь составят геометрическую прогрессию. Найдите исходные числа.

3.112*. Даны арифметическая и геометрическая прогрессии. Два первых члена геометрической прогрессии совпадают соответственно с первым и вторым членами арифметической прогрессии, и их сумма равна 24, а третий член геометрической прогрессии больше третьего члена арифметической прогрессии на 8. Задайте эти прогрессии формулами n-го члена.

3.113*. Найдите числа, одновременно являющиеся членами арифметической прогрессии 12, 15, 18, ... и геометрической прогрессии 1, 3, 9, ..., если каждая из этих прогрессий содержит по 100 членов.

3.114*. Пусть a_1, a_2, a_3 — конечная арифметическая прогрессия, разность которой не равна нулю. Известно, что a_1a_2, a_2a_3, a_3a_1 — конечная геометрическая прогрессия. Найдите ее знаменатель.

3.115. 1) В какую сумму обратится вклад в 200 000 р., положенный в банк на 5 лет, если банк ежегодно увеличивает имеющуюся на счету сумму на 2 %?
2) Банк ежегодно увеличивает имеющуюся на счету сумму на 3 %. Внесено 500 000 р. Какой станет сумма вклада через 2 года?

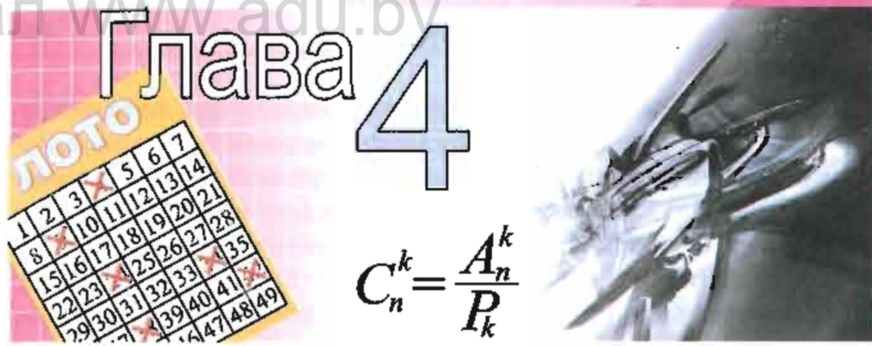
3.116. 1) Какой вклад надо внести в банк под 3 % годовых, чтобы через 3 года получить 458 000 р.?

2) Вкладчик внес в банк 600 000 р., а через год у него на счету оказалось 642 000 р. Под какие проценты был внесен вклад?

3.117. 1) В городе 200 тыс. жителей. Сколько жителей в нем будет через 10 лет, если ежегодный прирост населения в среднем составляет 4 %?

2) В настоящее время в городе проживают 400 тыс. человек. Какой была численность населения 5 лет назад, если ежегодный прирост населения города составлял в среднем 2,5 %?

3.118. Члены арифметической (a_n) и геометрической (b_n) прогрессий удовлетворяют условиям $a_{40} = b_{40} > 0$, $a_{60} = b_{60} > 0$. Сравните члены прогрессий a_{50} и b_{50} $(a_{40} \neq a_{60})$.



Элементы комбинаторики и теории вероятностей

▲ 4.1. Задачи по комбинаторике

Решим несколько задач.

Пример 1. Во вторник по расписанию 7 разных уроков, среди них физика и астрономия. Сколькими способами можно составить расписание так, чтобы физика и астрономия не стояли рядом?

Решение. *Способ 1.* Если в расписании физика стоит на 1-м уроке, то астрономия может стоять на 3-м, 4-м, 5-м, 6-м или 7-м уроках (5 способов). Аналогично, когда физика стоит на 7-м уроке, то получим еще 5 способов. А если физика стоит на каком-нибудь другом из пяти уроков (не на первом и не на седьмом), то астрономия может стоять только на четырех уроках; например, если физика стоит на 5-м уроке, то астрономия может стоять на 1-м, 2-м, 3-м или 7-м уроках. Таким образом, физика и астрономия могут размещаться в расписании так, что они не стоят рядом, $2 \cdot 5 + 5 \cdot 4 = 30$ способами. При каждом из этих способов оставшиеся 5 предметов могут располагаться в расписании 5! способами*. Значит, всего существует $30 \cdot 5! = 3600$ способов составления расписания, при которых физика и астрономия не стоят рядом.

Ответ: 3600.

Способ 2. Допустим, что в расписании физика и астрономия стоят рядом, причем физика стоит перед астрономией. Тогда физика может стоять на 1-м, 2-м, 3-м,

* Напомним, что произведение всех натуральных чисел от 1 до n обозначается символом «$n!$» и читается «эн-факториал». Таким образом: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n = n!$. Число перестановок из n предметов (элементов) равно $n!$.

4-м, 5-м или 6-м уроке (6 способов). Аналогично, если астрономия стоит перед физикой, то получим тоже 6 способов. Таким образом, физика и астрономия могут стоять рядом в расписании $2 \cdot 6 = 12$ способами. При каждом из этих способов оставшиеся 5 предметов могут располагаться в расписании 5! способами. Значит, всего существует $12 \cdot 5!$ способов составления расписания, в котором физика и астрономия стоят рядом.

Семь предметов могут располагаться в расписании уроков 7! способами, из которых физика и астрономия не стоят рядом в $7! - 12 \cdot 5!$ способах. Преобразовав это выражение, получим: $7! - 12 \cdot 5! = 7! - 2 \cdot 6! = (7 - 2)\,6! = 5 \cdot 6! = 3600$.

Ответ: 3600.

Пример 2. В фирменном магазине 35 различных видов шампуней, 20 видов зубных паст и 30 видов кремов для лица. Сколько различных подарочных наборов можно составить:

а) из одного шампуня, одной пасты и одного крема;

б) из двух разных шампуней, одной пасты и одного крема?

Решение. а) Шампунь можно выбрать 35 способами, зубную пасту — 20 способами и крем — 30 способами. Согласно правилу умножения набор для подарка можно выбрать $35 \cdot 20 \cdot 30 = 2100$ способами.

Ответ: 2100.

б) Один шампунь можно выбрать 35 способами, а затем второй из 34 оставшихся видов — 34 способами; итого получаем $35 \cdot 34 = 1190$ пар. Но при таком способе подсчета каждая пара шампуней считается дважды. Например, если мы выбрали сначала шампунь «Ромашковый», а потом «Крапивный» или сначала «Крапивный», а потом «Ромашковый», то ведь это одна и та же пара шампуней. Значит, различных пар шампуней будет $1190 : 2 = 585$, а способов составить набор для подарка будет $585 \cdot 20 \cdot 30 = 351\,000$.

Ответ: 351 000.

Пример 3. Сколько натуральных делителей имеет число 18 900?

Решение. Разложим число 18 900 на простые множители:

$$18\,900 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7.$$

Число 2^2 имеет 3 натуральных делителя (назовите их), число 3^3 — 4 натуральных делителя, число 5^2 — 3 натуральных делителя, число 7 — 2 натуральных делителя.

Каждый натуральный делитель числа $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$ можно получить, взяв по одному натуральному делителю каждого из чисел 2^2, 3^3, 5^2, 7 и перемножив эти делители. А согласно правилу умножения по одному натуральному делителю каждого из этих чисел можно взять $3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 72$ способами.

Ответ: 72.

Пример 4. Автоинспекция владельцам мотоциклов выдает новые номерные знаки, на каждом из которых указана серия из четырех разных букв и номер из трех цифр. Сколько номерных знаков могут быть выданы, если используются буквы А, Б, В, Г и цифры 0, 1, 2, 3, 4?

Решение. Четыре буквы можно расположить 4! способами. Каждую цифру можно выбрать пятью способами, значит, три цифры можно расположить 5^3 способами.

Итого получаем

$$4! \cdot 5^3 = 3000 \text{ номерных знаков.}$$

Ответ: 3000.

Пример 5. В шахматном турнире участвовало 20 человек (рис. 81), каждый с каждым играл одну партию. Сколько партий сыграно на турнире?

Рис. 81

Решение. Каждый из 20 участников сыграл 19 партий, итого получим $20 \cdot 19$ партий. Но при таком способе подсчета каждая партия считается дважды (т. е. $2! = 1 \cdot 2 = 2$).

Значит, всего сыграно $\frac{20 \cdot 19}{2!} = 190$ партий.

Ответ: 190.

Пример 6. У Андрея стоят на полке 19 разных альбомов с репродукциями картин великих художников. Наташа попросила дать ей посмотреть какие-нибудь 3 альбома. Сколькими способами Андрей может выполнить просьбу Наташи?

Решение. Первым Андрей может снять с полки один из 19 альбомов, вторым — любой из оставшихся 18 и, наконец, третьим — один из 17. Итого $19 \cdot 18 \cdot 17$ способов. Но если Наташа взяла альбомы с репродукциями картин Родена, Рембрандта и Ренуара, то ей совершенно безразлично, в каком порядке их снимали с полки. А порядков, в которых их можно было бы снять с полки, $3!$. Значит, число способов, которыми Андрей может выбрать 3 альбома из 19, равно $\frac{19 \cdot 18 \cdot 17}{3!} = 969$.

Ответ: 969.

1. Сформулируйте правило умножения для:
   а) двух выборов;
   б) n выборов.
2. Сколькими способами можно упорядочить множество из n элементов?
3. Как читается выражение $n!$ и чему равно его значение?

Упражнения

4.1. На географической карте изображено 19 стран. Сколькими способами можно раскрасить эту карту, если имеются краски 25 различных цветов, а все страны должны быть раскрашены различными красками?

4.2. У Оли 5 яблок, а у Вари 7 груш. Все фрукты разных сортов и размеров.
1) Сколькими способами они могут дать одно яблоко и одну грушу Степе?
2) Сколькими способами они могут обменять яблоко на грушу?
3) Сколькими способами они могут обменять 2 яблока на 2 груши?

4.3. На кодовом замке 10 цифр (рис. 82), а код состоит из 3 различных цифр. Какое наибольшее время понадобится, чтобы открыть замок, если забыт код, а на набор одной комбинации из трех цифр уходит 10 с?

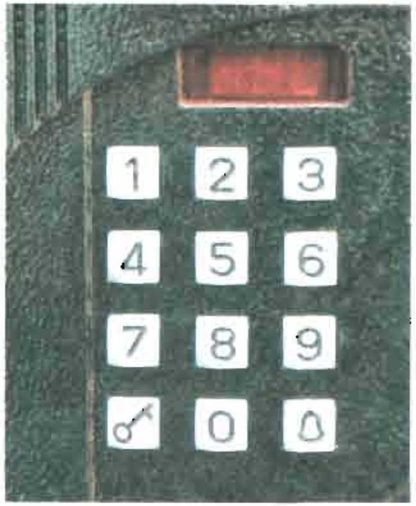


Рис. 82

4.4. Учащимся на протяжении 11 дней необходимо сдать 5 экзаменов, при этом в один день сдают не более одного экзамена.
1) Сколькими способами это можно сделать?
2) Сколькими способами это можно сделать, если известно, что последний экзамен назначен на 11-й день?

4.5. В розыгрыше первенства страны по футболу в высшей лиге участвуют 16 команд. Команды, занявшие первые 3 места, награждаются золотой, серебряной и бронзовой медалями, а команда, занявшая последнее место, покидает высшую лигу. Сколько разных результатов первенства может быть?

4.6. В доме у Винни-Пуха есть 5 чашек, 6 блюдец и 8 чайных ложек различных расцветок и форм. Сколькими способами он может накрыть стол для чаепития:
1) на двоих; 2) на троих;
3) на четверых; 4) на пятерых?

4.7. В классе 34 ученика. Сколькими способами можно выбрать из них группу дежурных по столовой из 4 человек?

4.8. На плоскости отмечены 17 точек, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой. Сколько отрезков нужно провести, чтобы соединить попарно эти точки?

4.9. Сколько есть четырехзначных чисел, у которых:
1) каждая следующая цифра меньше предыдущей;
2) каждая следующая цифра больше предыдущей?

4.10. В некоторой стране ребенку при рождении дают от одного до трех имен, выбирая их из 260. Сколькими способами можно назвать ребенка?

4.11. Из колоды в 36 карт вынимают нечетное число карт, причем не более 5. Сколькими способами это можно сделать?

4.12. В меню столовой 7 первых блюд, 10 вторых и 4 третьих. Сколькими способами можно выбрать два первых блюда, три вторых и три третьих, если все блюда разные?

4.13. Три инструктора и 9 туристов должны быть разбиты для похода на 2 группы по 6 человек, причем в каждой группе должен быть по крайней мере один инструктор. Сколькими способами это можно сделать?

4.14. Четыре инструктора и 8 туристов должны быть разбиты для похода на 2 группы по 6 человек, причем в каждой группе должен быть по крайней мере один инструктор. Сколькими способами это можно сделать?

4.15. Из всех букв слова «школьница» составили всевозможные слова*. В скольких из них:

1) на первом месте стоит буква «н»;
2) на первом месте не стоит буква «н»;
3) на первом месте стоит буква «н», а на последнем — «л»;
4) на первом месте стоит буква «н», а на последнем — не стоит буква «л»;
5) на первом месте стоит буква «н» или на последнем месте — буква «л»;
6) на первом месте стоит буква «н» или на последнем месте не стоит буква «л»;
7) буквы «н» и «л» стоят рядом;
8) буквы «н» и «л» не стоят рядом;
9) первая буква гласная;
10) первые три буквы гласные?

4.16. Сколько слов можно образовать из букв слова «школьница», состоящих из:

1) четырех букв; 2) шести букв;
3) восьми букв; 4) трех согласных букв;
5) пяти согласных букв; 6) трех гласных букв?

---

* В упражнениях главы 4 «словом» называется любая перестановка букв.

4.17. Сколько слов можно образовать из букв слова «школьница», состоящих из:

1) двух гласных и двух согласных букв;
2) трех гласных и трех согласных букв;
3) из шести букв и не содержащих буквы «а»;
4) из трех согласных букв и не содержащих буквы «а»?

4.18. Девять предметов нужно расположить в двух ящиках. Сколькими способами это можно сделать, если в каждом ящике должно быть не менее:

1) одного предмета; 2) двух предметов;
3) трех предметов; 4) четырех предметов?

4.19. На викторине по математике Маша завоевала 7 призов, Даша — 5 призов и Катя — 3 приза. Сколькими способами ведущий может распределить между ними 15 различных призов?

▲ 4.2. Задачи по теории вероятностей

Решим несколько задач.

Пример 1. В процессе эксплуатации станка выяснилось, что какая-то из пяти разных деталей (которые мы обозначим a, b, c, d, e) имеет дефект. Есть возможность за один раз проверить только три детали, и инженер отбирает их из данных пяти случайным образом. Чему равна вероятность того, что:

а) деталь a будет проверена (событие A);

б) будут проверены детали a и b (событие B);

в) будет проверена хотя бы одна из деталей a и b (событие C).

Решение. а) Выпишем все возможные наборы из данных 5 деталей по 3:

$$abc,\ abd,\ abe,\ acd,\ ace,\ ade,\ bcd,\ bce,\ bde,\ cde.$$

Это все элементарные события (их 10) в опыте, где случайным образом из 5 деталей отбирается 3. Каждому из этих элементарных событий мы приписываем вероятность $\frac{1}{10}$, так как считаем их равновозможными.

Событию A благоприятствуют 6 элементарных событий из 10: abc, abd, abe, acd, ace, ade (это все наборы, содержащие a). Поэтому вероятность события A равна $\frac{6}{10}$, т. е. $P(A) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

б) Событию B благоприятствуют 3 элементарных события из 10: abc, abd, abe (это все наборы, содержащие как a, так и b). Поэтому вероятность события B равна $\frac{3}{10}$, т. е. $P(B) = \frac{3}{10}$.

в) Только одно элементарное событие cde не благоприятствует событию C. Значит, событию C благоприятствует 9 элементарных событий и его вероятность равна $\frac{9}{10}$, т. е. $P(C) = \frac{9}{10}$.

Ответ: $P(A) = \frac{3}{5}$, $P(B) = \frac{3}{10}$, $P(C) = \frac{9}{10}$.

Заметим, что в задаче, которую мы решали, число деталей было небольшим, всего 5. Для большего числа деталей, например для 50, выписать все элементарные события было бы уже затруднительно. В подобных случаях мы пользуемся методами комбинаторики.

Пример 2. В процессе эксплуатации станка выяснилось, что какая-то из 50 различных деталей (три из которых мы обозначим a, b, c) имеет дефект. Есть возможность за один раз проверить только три детали, и инженер отбирает их из данных 50 случайным образом. Чему равна вероятность того, что:

а) деталь a будет проверена (событие A);

б) будут проверены детали a и b (событие B);

в) будет проверена хотя бы одна из деталей a и b (событие C).

Решение. а) Согласно правилу умножения из 50 деталей 3 детали можно выбрать $50 \cdot 49 \cdot 48$ способами, учитывая порядок их выбора. Но в нашей задаче порядок выбора деталей безразличен: набор из деталей a, b, c и набор из деталей b, c, a — это один и тот же набор. Поэтому число наборов из 50 деталей по 3 в $3!$ раз (т. е. в $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ раз) меньше. Оно равно $\frac{50 \cdot 49 \cdot 48}{3!}$.

Если рассматривать наборы, в которых одна деталь — это a, то их столько, сколько из оставшихся 49 деталей можно составить наборов по 2, т. е. $\frac{49 \cdot 48}{2!} = 49 \cdot 24$. Значит, число элементарных событий в нашем опыте равно $\frac{50 \cdot 49 \cdot 48}{3!}$, из них число событий, благоприятствующих событию A, равно $\frac{49 \cdot 48}{2!}$. Таким образом, вероятность события A равна

$$P(A) = \frac{49 \cdot 48}{2!} : \frac{50 \cdot 49 \cdot 48}{3!} = \frac{6}{100} = 0{,}06.$$

б) Если в наборе имеются детали a и b, то третью деталь к ним можно присоединить 48 способами. Значит, число элементарных событий, благоприятствующих событию B, равно 48. Поэтому вероятность события B равна

$$P(B) = 48 : \frac{50 \cdot 49 \cdot 48}{3!} = \frac{3}{2450} \approx 0{,}0012.$$

в) Допустим, что мы выписали все наборы, содержащие деталь a (согласно ситуации а) их $49 \cdot 24$), а затем выписали все наборы, содержащие деталь b, кроме тех, что содержат a и b (согласно ситуациям а) и б) их $49 \cdot 24 - 48$). Значит, число элементарных событий, благоприятствующих событию C, равно $49 \cdot 24 + 49 \cdot 24 - 48 = 2304$. Поэтому вероятность события C равна

$$P(C) = 2304 : \frac{50 \cdot 49 \cdot 48}{3!} = \frac{72}{1225} \approx 0{,}0588.$$

Ответ: $P(A) = 0{,}06$, $P(B) \approx 0{,}0012$, $P(C) \approx 0{,}0588$.

Пример 3. У Андрея стоят на полке 19 разных альбомов (рис. 83) с репродукциями картин великих художников, среди них альбомы Родена, Рембрандта и Ренуара (по одному альбому каждого художника). Андрей снял с полки наугад 3 альбома. Какова вероятность того, что:

Рис. 83

а) сняты альбомы Родена, Рембрандта и Ренуара (событие A);

б) среди снятых альбомов нет альбомов ни Родена, ни Рембрандта, ни Ренуара (событие B);

в) среди снятых альбомов есть хотя бы один из альбомов Родена, Рембрандта или Ренуара (событие C).

Решение. а) Событию A благоприятствует одно элементарное событие из 969 (см. пример 6 из п. 4.1). Поэтому вероятность события A равна $P(A) = \frac{1}{969}$.

б) Число альбомов, среди которых нет альбомов ни Родена, ни Рембрандта, ни Ренуара, равно 16. Число способов, которыми Андрей может выбрать 3 альбома из 16, равно $\frac{16 \cdot 15 \cdot 14}{3!} = 560$. Значит, событию B благоприятствуют 560 элементарных событий из 969. Поэтому вероятность события B равна $P(B) = \frac{560}{969}$.

в) События B и C противоположны, $C = \overline{B}$. Поэтому

$$P(C) = P(\overline{B}) = 1 - P(\overline{\overline{B}}) = 1 - \frac{560}{969} = \frac{409}{969}.$$

Ответ: $P(A) = \frac{1}{969}$, $P(B) = \frac{560}{969}$, $P(C) = \frac{409}{969}$.

?

1. Чему равна вероятность элементарного события, если число всех элементарных событий в опыте равно: а) 17; б) 157; в) m?
2. Чему равна вероятность события A, если ему благоприятствуют n событий из m?
3. Чему равна вероятность события, противоположного событию A?

Упражнения

4.20. У Татьяны Петровны 7 различных пар перчаток. Какова вероятность того, что вынутые из ящика наугад две перчатки окажутся:

1) на левую руку; 2) на правую руку;
3) на одну и ту же руку; 4) на разные руки;
5) из одной пары; 6) из разных пар?

4.21. Из разрезной азбуки сложено слово «гипербола». Буквы этого слова тщательно перемешивают, выбирают из них наугад четыре и в порядке выбора складывают слово. Какова вероятность того, что это слово содержит:

1) один согласный; 2) один гласный;
3) два согласных; 4) три согласных;
5) только гласные; 6) только согласные?

4.22. Из разрезной азбуки сложено слово «функция». Буквы этого слова тщательно перемешивают, выбирают из них наугад четыре и в порядке выбора складывают слово. Какова вероятность того, что это слово:

1) начинается с буквы «ф»;
2) начинается с буквы «ф» и кончается буквой «я»?

4.23. В каждом из трех ящиков по 10 шариков, пронумерованных числами от 1 до 10. Из каждого ящика вынут один шарик (рис. 84). Какова вероятность того, что:

1) номера всех вынутых шариков разные;
2) номера всех вынутых шариков одинаковые;
3) хотя бы у двух вынутых шариков номера одинаковые;
4) хотя бы у двух вынутых шариков номера четные?

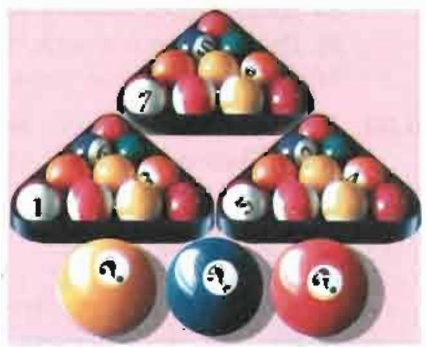


Рис. 84

4.24. Антон купил себе и своим друзьям Боре, Вадику, Грише, Диме, Егору, Жене билеты в кинотеатр в одном ряду с местами с 1-го по 7-е. Билеты он раздал, не глядя на номера мест. Какова вероятность того, что:

1) Дима сидел на первом месте;
2) Дима не сидел на первом месте;
3) Дима сидел слева от Егора, не обязательно рядом;
4) Дима сидел слева от Егора и рядом с ним;
5) Дима сидел рядом с Егором;
6) Дима не сидел рядом с Егором;

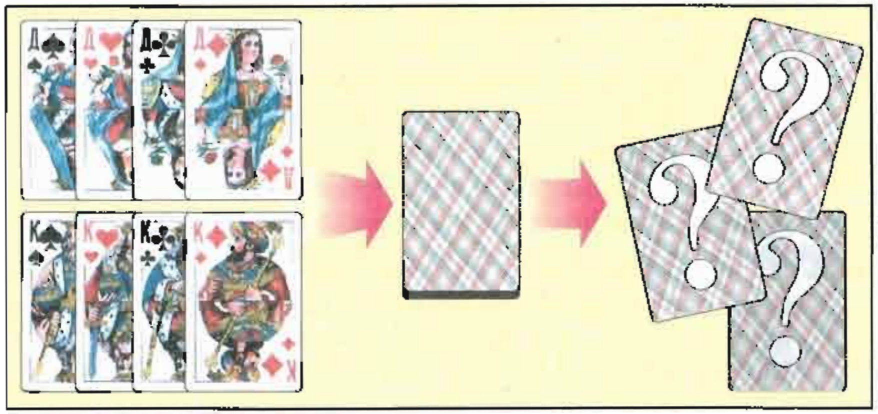


Рис. 85

7) Дима сидел слева от Егора и справа от Антона;
8) Дима сидел между Егором и Антоном;
9) Дима не сидел между Егором и Антоном;
10) Дима сидел на первом месте и рядом с Егором?

4.25. Из карточной колоды вынули четыре дамы и четыре короля. Затем эти вынутые карты тщательно перетасовали и открыли три верхние (рис. 85). Какова вероятность того, что это оказались:

1) три дамы;
2) две дамы и король;
3) карты разных мастей;
4) карты красного цвета;
5) карты одного цвета;
6) карты разных цветов?

4.26. Из карточной колоды вынули четыре дамы и четыре короля. Затем эти вынутые карты тщательно перетасовали и открыли четыре верхние. Какова вероятность того, что это оказались:

1) четыре дамы;
2) три дамы и король;
3) две дамы и два короля двух мастей;
4) две дамы и два короля четырех мастей;
5) карты разных мастей;
6) карты красного цвета?

4.27. В коробке 30 карандашей, 20 из них черные, 10 — красные. Какова вероятность того, что, взяв наугад 2 карандаша, вы извлечете:

1) два черных карандаша;

2) два красных карандаша;
3) один черный и один красный карандаши?

4.28. В коробке 30 карандашей, 20 из них черные, 10 — красные. Какова вероятность того, что, взяв наугад 3 карандаша, вы извлечете:

1) три черных карандаша;
2) два черных карандаша и один красный;
3) два красных карандаша и один черный;
4) три красных карандаша?

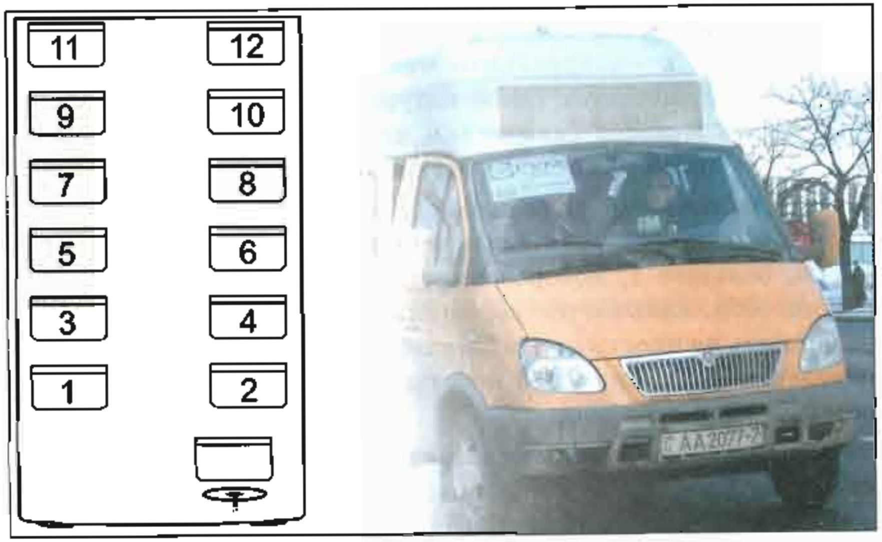


Рис. 86

4.29. В 12-местный автобус (рис. 86) купили билеты 6 мужчин и 6 женщин. Какова вероятность того, что:
1) каждый мужчина получил билет на место с нечетным номером;
2) каждый мужчина будет сидеть рядом с женщиной?

ПРИЛОЖЕНИЕ

Материалы для повторения теоретических вопросов арифметики и алгебры курса математики 5—10-х классов

Натуральные числа

Числа 1, 2, 3, 4, 5, ..., возникающие при счете, называют ***натуральными*** или ***целыми положительными. Множество натуральных чисел обозначается буквой N.***

Пусть a и b — натуральные числа. Говорят, что ***a делится на b***, если существует такое натуральное число s, что $a = bs$. Число b называется ***делителем*** числа a, число a называется ***кратным*** числа b, число s называется ***частным*** чисел a и b.

Натуральное число, большее 1, которое не имеет делителей, кроме 1 и самого себя, называется ***простым***. Натуральное число, большее 1, которое имеет делитель, отличный от 1 и самого себя, называется ***составным***. Составное число можно разложить на простые множители, т. е. представить в виде произведения различных его простых делителей, взятых в соответствующих степенях.

Наибольшим общим делителем (НОД) двух натуральных чисел a и b называется наибольшее натуральное число, на которое делятся a и b. Если НОД $(a, b) = 1$, то числа a и b называются ***взаимно простыми. Наименьшим общим кратным (НОК)*** двух натуральных чисел a и b называется наименьшее натуральное число, которое делится на a и на b.

Целые числа

Числа вида $(-m)$, где m — натуральное число, называют ***отрицательными целыми числами***. Множество, состоящее из всех натуральных чисел, нуля и всех отрицательных целых чисел, называется ***множеством целых чисел*** и обозначается буквой ***Z***.

Делимость целых чисел, НОД, взаимная простота и НОК двух целых чисел определяются так же, как и для натуральных чисел.

Разделить целое число a на натуральное число b с остатком — значит представить a в виде

$$a = bs + r, \text{ где } s \text{ и } r \text{ — целые числа, } 0 \leqslant r < b.$$

Для любого целого числа a и натурального числа b деление с остатком возможно, и причем однозначно.

Дроби. Рациональные числа

Пусть $n > 1$ — натуральное число; n-я часть единицы обозначается $\frac{1}{n}$. Эта часть, взятая k раз (k — натуральное число), обозначается $\frac{k}{n}$ и называется ***положительным дробным числом*** или просто ***дробью***. Дробь $\frac{k}{n}$ называют ***еще обыкновенной***.

Если $k < n$, то дробь $\frac{k}{n}$ называется ***правильной***, а если $k \geqslant n$, то ***неправильной***. Всякое натуральное число можно считать дробью со знаменателем 1.

Дробь $\frac{a}{10^m}$, где $m \geqslant 0$, записанная в виде

$$a_0,\ a_1a_2a_3 \ldots a_m,$$

где a_0 — целое неотрицательное число, а a_1, a_2, a_3, ..., a_m — цифры, называется ***конечной десятичной дробью***.

Дроби со знаком минус, т. е. числа вида $-\frac{k}{n}$, где k и n — натуральные числа, называются ***отрицательными дробями***. Множество, состоящее из всех положительных дробей, нуля и всех отрицательных дробей, называется ***множеством рациональных чисел*** и обозначается буквой Q.

Определение ***равенства дробей***: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, если $ad = bc$.

Основное свойство дроби: $\frac{a}{b} = \frac{ka}{kb}$ $(k \neq 0)$.

Дробь $\frac{a}{b}$ называется ***несократимой***, если a и b взаимно просты.

Правила действий над дробями:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}; \qquad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd};$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}; \qquad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}.$$

Каждое рациональное число можно представить в виде дроби $\frac{m}{n}$, где m — целое число, а n — натуральное число. Если при этом m — положительное, то рациональное число называется ***положительным***, а если m — отрицательное, то рациональное число называется ***отрицательным***.

Бесконечная десятичная дробь, которая содержит, начиная с некоторого места после запятой, периодически повторяющуюся группу цифр, называется ***периодической***, а эта группа цифр называется ***периодом***.

Количество цифр в периоде называется ***длиной периода***. Каждое рациональное число можно представить в виде бесконечной периодической десятичной дроби.

Действительные числа

Для нужд математики рациональных чисел недостаточно и вводятся новые числа — ***иррациональные***. Каждое иррациональное число можно представить в виде бесконечной непериодической десятичной дроби.

Множество, состоящее из всех рациональных и всех иррациональных чисел, называется ***множеством действительных чисел*** и обозначается буквой R.

Основные свойства сложения и умножения действительных чисел.

Переместительный закон: $a+b=b+a$, $\quad ab=ba$.

Сочетательный закон:

$$(a+b)+c=a+(b+c), \qquad (ab)c=a(bc).$$

Существуют числа 0 и 1 такие, что для любого числа a имеют место равенства: $a+0=a$; $a\cdot 1=a$.

Для любого числа a существует ***противоположное ему число*** $-a$, и для любого числа $a\neq 0$ существует ***обратное число*** $a^{-1}=\frac{1}{a}$, такие, что имеют место равенства:

$$a+(-a)=0; \qquad a\cdot a^{-1}=1.$$

Распределительный закон: $(a+b)c=ac+bc$.

Сравнение действительных чисел. Действительное число может быть либо положительным, либо отрицательным, либо нулем. Причем сумма (произведение) двух положительных чисел является положительным числом.

Каждой точке на координатной прямой соответствует определенное действительное число — координата этой точки. Наоборот, каждому действительному числу a соответствует определенная точка на координатной прямой — точка с координатой a.

Модуль действительного числа a (обозначается $|a|$) определяется так: $|a|=a$, если $a\geqslant 0$, и $|a|=-a$, если $a<0$.

Действительные числа ***приближаются*** конечными десятичными дробями ***с точностью до*** 10^{-n} ***с недостатком*** и ***с избытком***. Например, 3,14 — приближение числа $\pi=3{,}14159\ldots$ с точностью до 10^{-2} с недостатком, а 3,15 — приближение числа $\pi=3{,}14159\ldots$ с точностью до 10^{-2} с избытком, т. е. $3{,}14<\pi<3{,}15$.

Проценты

Процентом называют одну сотую: $1\,\%=\frac{1}{100}$.

Нахождение числа x, которое равно $p\,\%$ числа a:

$$x=a\cdot p\,\%=a\cdot\frac{p}{100}=\frac{ap}{100}.$$

Нахождение числа x, если $p\,\%$ его равны b:

$$x=b:p\,\%=b:\frac{p}{100}=\frac{100b}{p}.$$

Пропорция

Частное $\frac{a}{b}$ чисел a и b называется ***отношением этих чисел***.

Равенство $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ двух отношений $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ называется ***пропорцией***. Пропорцию можно записать и так: $a:b=c:d$.

Числа a и d называются ***крайними членами пропорции***, b и c — ***средними членами пропорции*** $a:b=c:d$.

Основное свойство пропорции: *произведение крайних членов пропорции равно произведению средних членов, т. е.* $ad = bc$.

Отношение длины линии на ее изображении к длине этой линии в натуре называется ***масштабом***.

Алгебраические выражения. Равенства и тождества

Выражение, составленное из чисел или букв, знаков действий сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в целую степень и извлечения арифметического корня, а также скобок, указывающих на порядок выполнения этих действий, называется ***алгебраическим***.

Если в алгебраическом выражении встречается *деление на нуль, извлечение корня четной степени из отрицательного числа* или *возведение нуля в нулевую степень*, то говорят, что такое выражение ***не имеет смысла***.

Если в алгебраическом выражении встречаются буквы, которые могут принимать различные значения, то эти буквы называются ***переменными***. Наборы значений, которые могут принимать переменные, образуют ***естественную область определения выражения*** (или, другими словами, область допустимых значений переменных, входящих в выражение). В область определения выражения могут входить только такие наборы значений переменных, при которых выражение имеет смысл.

Если в выражение вместо переменных подставить какой-либо набор их значений из области определения и выполнить все указанные в этом выражении действия, то получится число, которое называется ***значением выражения*** при этом наборе переменных.

Если два выражения A и B соединить знаком «=», то получится запись $A = B$, называемая ***равенством***. Выражение A называют ***левой частью***, а выражение B — ***правой частью*** равенства.

Когда обе части равенства обозначают числа, то оно называется ***числовым***. ***Верное числовое равенство*** — это такое равенство, в котором обе части обозначают одно и то же число.

Свойства верного числового равенства

1. *Если к обеим частям верного числового равенства прибавить одно и то же число или из обеих частей верного числового равенства вычесть одно и то же число, то получится верное числовое равенство.*
2. *Если в верном числовом равенстве перенести слагаемое из одной части в другую с противоположным знаком, то получится верное числовое равенство.*
3. *Если обе части верного числового равенства умножить или разделить на одно и то же число, отличное от нуля, то получится верное числовое равенство.*

Условие равенства произведения нулю

1. Если множители не равны нулю, то и произведение не равно нулю, т. е. если $a \neq 0$ и $b \neq 0$, то $ab \neq 0$.
2. Если произведение равно нулю, то хотя бы один из множителей равен нулю, т. е. если $ab = 0$, то $a = 0$ или $b = 0$.

Тождество

Пусть A и B — выражения. Равенство $A = B$ называется ***тождеством***, если оно превращается в верное числовое равенство при любых значениях переменных, для которых оба выражения A и B ***определены***, т. е. имеют смысл. Верное числовое равенство также является тождеством.

Если $A = B$ — тождество, то выражения A и B называются ***тождественно равными***.

Формулы сокращенного умножения

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$
$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b);$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3; \quad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3;$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2); \quad a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2).$$

Степень с целым показателем

Определение степени. Пусть n — натуральное число, a — действительное число. Тогда

$$a^n = \underbrace{aa \ldots a}_{n \text{ раз}} \text{ при } a \geqslant 2; \qquad a^1 = a.$$

Пусть $n \leqslant 0$ — целое число, $a \neq 0$ — действительное число.

Тогда

$$a^0 = 1; \qquad a^n = \frac{1}{a^{-n}} \text{ при } n < 0.$$

Выражение a^n называется ***n*-й степенью числа *a***, число a — ***основанием степени***, число n — ***показателем степени***.

Свойства степеней. Для любых действительных чисел $a \neq 0$, $b \neq 0$ и любых целых m и n имеют место тождества:

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;
2) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$;
3) $(a^m)^n = a^{mn}$;
4) $(ab)^n = a^n b^n$;
5) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Запись положительного числа u в виде $u = a \cdot 10^n$, где $1 \leqslant a < 10$ и n — целое число, называется ***стандартным видом числа u***, а n — ***порядком числа u***.

Корень *n*-й степени

Корнем n-й степени из числа a называется такое число t, n-я степень которого равна a. Из положительного числа a существует ровно два корня четной степени и единственный корень нечетной степени.

Свойства корней n-й степени

При нечетном $n > 1$ и любом a имеют место тождества:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a; \qquad \sqrt[n]{a^n} = a; \qquad \sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}.$$

При четном $n > 1$ и любом $a \geqslant 0$ имеют место тождества:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a; \qquad \sqrt[n]{a^n} = |a|.$$

При $n > 1$, k целом и любом $a > 0$ имеет место тождество:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}.$$

При нечетном $n > 1$ и любых a и b имеют место тождества:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}; \qquad \sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}; \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \ (b \neq 0).$$

При четном $n > 1$ и любых $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$ имеют место тождества:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}; \qquad \sqrt[n]{a^n b} = |a|\sqrt[n]{b}; \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \ (b \neq 0).$$

Уравнения. Уравнения с одной переменной. Основные определения

Равенство, содержащее одну переменную, называется ***уравнением с одной переменной (одним неизвестным)***. Значение переменной (неизвестного), при котором уравнение превращается в верное числовое равенство, называется ***корнем (решением) уравнения***. ***Решить уравнение*** — это значит найти все его корни (решения) или доказать, что их нет.

Два уравнения называются ***равносильными***, если каждый корень первого уравнения является корнем второго, и наоборот,— каждый корень второго уравнения является корнем первого. Равносильными считаются и уравнения, которые не имеют решений.

Свойства уравнений

1) *Если в уравнении перенести слагаемое из одной части в другую с противоположным знаком, то получится уравнение, равносильное данному.*
2) *Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же число, отличное от нуля, то получится уравнение, равносильное данному.*

Линейное уравнение

Уравнение вида $ax = b$, где a и b — числа, x — неизвестное, называется ***линейным***.

Если $a \neq 0$, то уравнение имеет единственное решение $x = \frac{b}{a}$.

Если $a = b = 0$, то корнем уравнения является любое число.

Если $a = 0$, $b \neq 0$, то уравнение не имеет корней.

Квадратное уравнение

Уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b, c — числа, $a \neq 0$, x — неизвестное, называется ***квадратным***. Число a называется ***старшим коэффициентом***, b — ***средним коэффициентом***, c — ***свободным членом*** квадратного уравнения.

Дискриминант квадратного уравнения $D = b^2 - 4ac$.

Если $D > 0$, то уравнение имеет два различных корня

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Если $D = 0$, то уравнение имеет два равных корня

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a}.$$

Если $D < 0$, то уравнение не имеет корней.

Квадратное уравнение со старшим коэффициентом, равным 1, называется ***приведенным***.

Теорема Виета (прямая и обратная). Если x_1 и x_2 — корни приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$, то

$$x_1 + x_2 = -p, \qquad x_1x_2 = q.$$

Если для чисел x_1 и x_2 верны равенства $x_1 + x_2 = -p$, $x_1x_2 = q$, то x_1 и x_2 — корни приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Квадратный трехчлен — это левая часть квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. Корни этого уравнения называются ***корнями квадратного трехчлена***, а дискриминант — ***дискриминантом квадратного трехчлена***.

Разложение квадратного трехчлена на линейные множители. Если x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$, то

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Уравнение $ax^4 + bx^2 + c = 0$, где $a \neq 0$, называется ***биквадратным***. Оно сводится к квадратному введением нового неизвестного $u = x^2$.

Рациональные уравнения

Уравнение вида $\frac{A}{B} = 0$, где A и B — многочлены от одной и той же переменной, называется ***рациональным***. Рациональное уравнение равносильно системе $\begin{cases} A = 0, \\ B \neq 0. \end{cases}$

Уравнения с двумя переменными

Равенство, содержащее две переменные, называется ***уравнением с двумя переменными***. Переменные в уравнении называются также ***неизвестными***.

Упорядоченная пара значений неизвестных, при которых уравнение превращается в верное числовое равенство, называется ***решением уравнения с двумя неизвестными***.

Два уравнения с двумя неизвестными называются ***равносильными***, если каждое решение одного уравнения является решением другого, и наоборот, т. е. когда они имеют одни и те же решения. Равносильными считаются и уравнения, которые не имеют решений.

При решении уравнений с двумя неизвестными используются те же свойства, что и при решении уравнений с одним неизвестным.

Графиком уравнения с двумя переменными называется множество всех точек на координатной плоскости, координаты которых являются решениями этого уравнения.

Формула расстояния между точками $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Уравнение окружности с центром в точке $M(a; b)$ и радиусом R

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

Системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными

Когда зависимость между двумя переменными x и y описывается при помощи двух уравнений

$$a_1x + b_1y = c_1 \text{ и } a_2x + b_2y = c_2,$$

то говорят о ***системе двух линейных уравнений с двумя переменными (неизвестными)***.

Обычно система записывается в виде

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

Аналогично определяется и записывается система двух произвольных уравнений с двумя неизвестными.

Упорядоченная пара значений переменных, которые одновременно обращают каждое уравнение системы в верное числовое равенство, называется ***решением системы уравнений.***

Две системы уравнений называются ***равносильными,*** если каждое решение одной системы является решением другой, и наоборот, т. е. когда они имеют одни и те же решения. Равносильными считаются и системы, которые не имеют решений.

Число решений системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

1) система имеет единственное решение, если $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$;
2) система имеет бесконечно много решений, если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$;
3) система не имеет решений, если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$.

Числовые неравенства. Основные определения

Говорят, что ***число a больше числа b*** ($a > b$), если разность $a - b$ — положительное число, и что ***a меньше b*** ($a < b$), если разность $a - b$ — отрицательное число. Из двух чисел больше то, которое изображается на координатной прямой точкой, расположенной правее.

Если два выражения A и B соединить одним из знаков «>» или «<», то полученную запись $A > B$ или и $A < B$ называют ***неравенством.*** Выражение A называют ***левой частью неравенства,*** а выражение B — ***правой частью неравенства.***

Неравенства $A < B$ и $C < D$ ($A > B$ и $C > D$) называют ***неравенствами одного знака,*** а неравенства $A < B$ и $C > D$ называют ***неравенствами разных знаков.*** Знаки неравенств «<» и «>» называют ***противоположными.***

Когда обе части неравенства обозначают числа, оно называется ***числовым.*** Числовое неравенство $A < B$ называется ***верным,*** если его левая часть обозначает число, меньшее, чем правая. Аналогично, числовое неравенство $A > B$ верное, если его левая часть обозначает число, большее, чем правая.

Неравенства со знаками «<» и «>» называются ***строгими.***

Нестрогие неравенства образуются, если выражения A и B соединяются одним из знаков «≤» или «≥». Знак «≤» читается «меньше или равно», или «не больше», а знак «≥» читается «больше или равно», или «не меньше».

Свойства числовых неравенств (сформулированы в основном для строгих неравенств, но верны и для нестрогих)

1) *Если $a < b$, то $b > a$; если $b > a$, то $a < b$;*
2) *если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$;*
3) *если $a < b$, то $a + c < b + c$;*
4) *если $a < b$ и $c < d$, то $a + c < b + d$;*
5) *если $a < b$ и $c > 0$, то $ac < bc$;*
6) *если $a < b$ и $c < 0$, то $ac > bc$;*
7) *если $0 < a < b$ и $0 < c < d$, то $ac < bd$;*
8) *если $0 < a < b$ и n — натуральное число, то $a^n < b^n$;*
9) *если $0 < a < b$, то $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$;*
10) *если $0 < a < b$, то $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$;*
11) *если $a \geq 0$ и $b \geq 0$, то $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (среднее арифметическое двух неотрицательных чисел не меньше их среднего геометрического);*
12) $|a| - |b| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$.

Двойные неравенства — это неравенства вида:

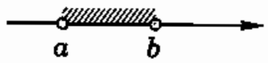
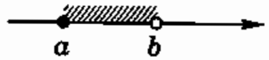
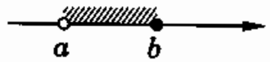
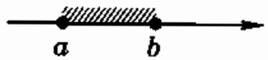
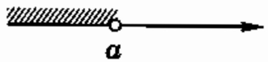
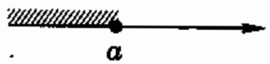
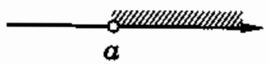
$a < c < b$; $\quad a \leq c < b$; $\quad a < c \leq b$; $\quad a \leq c \leq b$.

Неравенство $a < c < b$ означает, что $c > a$ и $c < b$; это можно записать и так:

$$\begin{cases} c > a, \\ c < b. \end{cases}$$

Двойные неравенства читаются, как правило, начиная со средней части. Например, неравенство $a < c < b$ читается «c больше a и меньше b».

Множество всех чисел x, удовлетворяющих одному из неравенств $x < a$, $x > a$, $a < x < b$ ($x \leq a$, $x \geq a$, $a \leq x < b$ и т. п.), называется ***числовым промежутком.*** В следующей таблице приводятся обозначения различных числовых промежутков.

Условие, которому удовлетворяет число x	Обозначение множества всех чисел, удовлетворяющих этому условию	Изображение этого множества на координатной прямой
$a < x < b$	$(a; b)$	
$a \leqslant x < b$	$[a; b)$	
$a < x \leqslant b$	$(a; b]$	
$a \leqslant x \leqslant b$	$[a; b]$	
$x < a$	$(-\infty; a)$	
$x \leqslant a$	$(-\infty; a]$	
$x > a$	$(a; +\infty)$	
$x \geqslant a$	$[a; +\infty)$	

Неравенства с одной переменной. Основные определения

Неравенство, содержащее одну переменную, называется ***неравенством с одной переменной*** или ***неравенством с одним неизвестным***.

Решением неравенства с одной переменной называется такое значение переменной (неизвестного), при котором это неравенство превращается в верное числовое неравенство. ***Решить неравенство*** — это значит найти все его решения или доказать, что их нет.

Два неравенства называются ***равносильными***, если каждое решение одного неравенства является решением другого, и наоборот, т. е. когда они имеют одни и те же решения. Равносильными называются и неравенства, которые не имеют решений.

Свойства неравенств

1) *Если в неравенстве перенести слагаемое из одной части в другую с противоположным знаком, то получится неравенство, равносильное данному;*
2) *если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получится неравенство, равносильное данному;*
3) *если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число и изменить знак неравенства на противоположный, то получится неравенство, равносильное данному.*

Линейным неравенством с одним неизвестным называется неравенство вида $ax > b$ ($ax \geqslant b$, $ax < b$, $ax \leqslant b$), где a и b — числа, x — неизвестное.

Квадратным неравенством с одним неизвестным или ***неравенством второй степени*** называется неравенство вида $ax^2 + bx + c > 0$ ($ax^2 + bx + c \geqslant 0$; $ax^2 + bx + c < 0$; $ax^2 + bx + c \leqslant 0$), где $a \neq 0$, b, c — числа, x — неизвестное.

Рациональным неравенством называется неравенство вида $\frac{A}{B} > 0$ $\left(\frac{A}{B} \geqslant 0;\ \frac{A}{B} < 0;\ \frac{A}{B} \leqslant 0\right)$, где A и B — многочлены от одной и той же переменной.

Функции. Основные определения

Закон, по которому каждому значению x из множества чисел D ставится в соответствие одно определенное значение y, называется ***функцией, заданной на множестве*** D.

При этом x называют ***независимой переменной*** или ***аргументом***, y — ***зависимой переменной*** или ***функцией от*** x, а множество D — ***областью определения функции***.

В алгебре основным ***способом задания функции*** является ***формула***, левая часть которой — зависимая переменная, а правая — выражение с независимой переменной.

Функция может быть задана также *таблицей*, *графиком*, *описанием*.

Множество всех значений, которые может принимать функция, называется ***множеством значений функции***, его часто обозначают буквой E.

Графиком функции называется множество всех точек $M(x; y)$ на координатной плоскости, где x принимает значения из области определения, а y — соответствующие им значения функции.

Функция называется ***возрастающей в некотором промежутке***, если в этом промежутке большему значению аргумента соответствует большее значение функции. Функция называется ***убывающей в некотором промежутке***, если в этом промежутке большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

Функция с областью определения, симметричной относительно начала координат, называется ***нечетной***, если при противоположных значениях аргумента ее значения противоположные числа. *График нечетной функции симметричен относительно начала координат.*

Функция с областью определения, симметричной относительно начала координат, называется ***четной***, если при противоположных значениях аргумента ее значения равны. *График четной функции симметричен относительно оси Oy.*

Нулем функции называется то значение x, при котором значение функции равно нулю.

Промежутки знакопостоянства — это множества тех значений x, при которых $y > 0$ (значения функции положительные) или $y < 0$ (значения функции отрицательные).

Прямая пропорциональность

Прямой пропорциональностью называется функция вида $y = kx$ (k — число, $k \neq 0$) с областью определения — множеством R.

Графиком прямой пропорциональности является прямая, проходящая через начало координат и не совпадающая ни с одной из координатных осей (рис. 87).

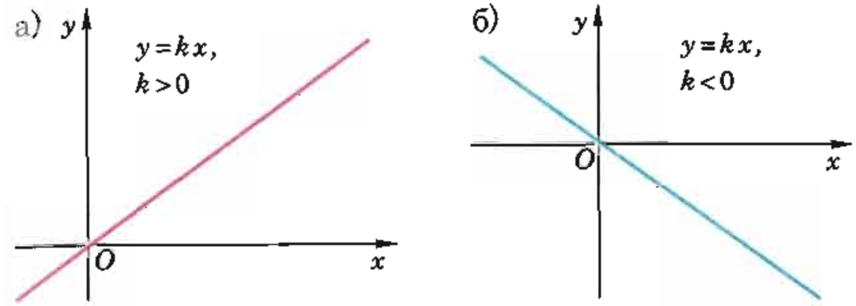


Рис. 87

Свойства прямой пропорциональности — функции, заданной формулой $y = kx (k \neq 0)$

1. *Областью определения функции является множество действительных чисел R.*
2. *Множеством значений функции является множество R.*
3. *Функция не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значений.*
4. *График функции проходит через начало координат (0; 0).*
5. *Значение $x = 0$ является нулем функции.*
6. *Функция является нечетной.*
7. *При $k > 0$ функция возрастающая в области определения.*

   При $k < 0$ функция убывающая в области определения.
8. *При $k > 0$: если $x \in (0; +\infty)$, то $y > 0$; если $x \in (-\infty; 0)$, то $y < 0$.*

   При $k < 0$: если $x \in (0; +\infty)$, то $y < 0$; если $x \in (-\infty; 0)$, то $y > 0$.

   Таким образом, $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$ — промежутки знакопостоянства.

Линейная функция

Линейной функцией называется функция вида $y = kx + b$ (k и b — числа).

Графиком линейной функции $y = kx + b$ ($k \neq 0$) является

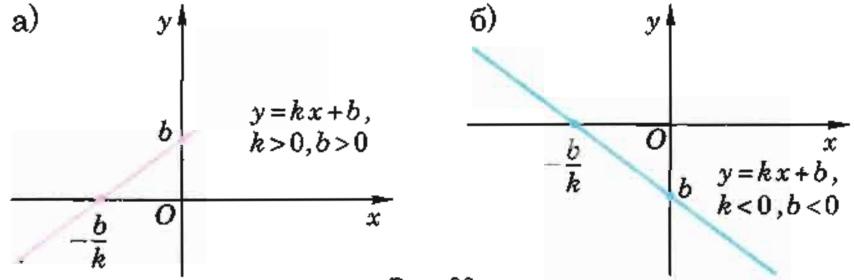


Рис. 88

прямая, для построения которой достаточно знать координаты двух любых ее точек (рис. 88).

Графиком линейной функции $y = b$ является прямая, проходящая через точку $(0;\ b)$ и параллельная оси Ox. При $b = 0$ график функции совпадает с осью Ox (рис. 89).

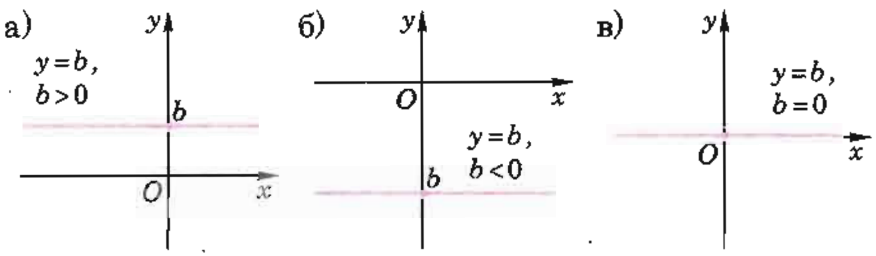


Рис. 89

Любая прямая, не параллельная оси Oy, является графиком линейной функции.

Свойства линейной функции $y = kx + b$

1. *Областью определения функции является множество действительных чисел $\mathbb{R}$.*
2. *Множеством значений функции при $k \neq 0$ является множество $\mathbb{R}$. При $k = 0$ множество значений функции состоит из одного числа b.*
3. *При $k \neq 0$ функция не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значений; при $k = 0$ значение $y = b$ — единственное.*
4. *При $k \neq 0$ график функции пересекает оси Ox и Oy в точках $\left(-\frac{b}{k};\ 0\right)$ и $(0;\ b)$; при $k = 0$ есть только точка пересечения с осью Oy (при $b \neq 0$) — $(0;\ b)$; при $k = b = 0$ график совпадает с осью Ox.*

5. *При $k \neq 0$ значение $x = -\frac{b}{k}$ является нулем функции.*
   При $k = 0$ и $b \neq 0$ функция нулей не имеет.
   При $k = 0$ и $b = 0$ каждое действительное число является нулем функции.
6. *При $k \neq 0$ и $b \neq 0$ функция не является ни четной, ни нечетной.*
   При $k = 0$ и $b \neq 0$ функция четная.
   При $k = 0$ и $b = 0$ функция одновременно четная и нечетная.
7. *При $k > 0$ функция возрастающая в области определения.*
   При $k < 0$ функция убывающая в области определения.
   При $k = 0$ функция постоянная в области определения.
8. *При $k \neq 0$ промежутками знакопостоянства являются $\left(-\infty;\ -\frac{b}{k}\right)$, $\left(-\frac{b}{k};\ +\infty\right)$.*
   При $k = 0$ и $b \neq 0$ промежутком знакопостоянства является $(-\infty;\ +\infty)$.

Функция $y = |x|$

График функции $y = |x|$ состоит из части прямой $y = x$ при $x \geq 0$ и из части прямой $y = -x$ при $x < 0$. Он изображен на рисунке 90.

Свойства функции $y = |x|$

1. *Областью определения функции является множество всех действительных чисел $\mathbb{R}$.*
2. *Множеством значений является промежуток $[0;\ +\infty)$.*
3. *Наименьшее значение функция принимает в точке $x = 0$,— оно равно нулю.*
   Наибольшего значения функции не существует.
4. *График функции имеет с осями координат единственную точку пересечения $(0;\ 0)$ — начало координат.*
5. *Нулем функции является значение $x = 0$.*

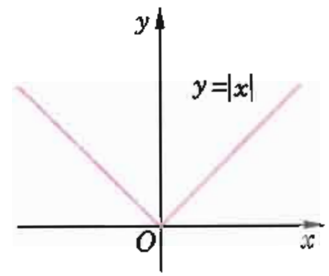


Рис. 90

6. *Функция четная.*
7. *На промежутке* $[0; +\infty)$ *функция возрастает. На промежутке* $(-\infty; 0]$ *функция убывает.*
8. *Все точки графика функции, кроме начала координат, лежат над осью абсцисс; значит,* $(-\infty; 0)$ *и* $(0; +\infty)$ — *промежутки знакопостоянства.*

Функция $y = x^2$

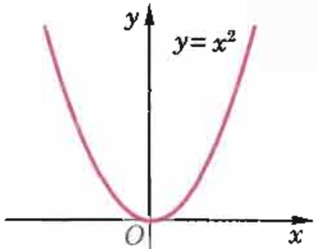


Рис. 91

График функции $y = x^2$ называется *параболой* (рис. 91).

Свойства функции $y = x^2$.

1. *Областью определения функции является множество всех действительных чисел* R.
2. *Множеством значений является промежуток* $[0; +\infty)$.
3. *Наименьшее значение функция принимает в точке* $x = 0$; *оно равно нулю.*
   Наибольшего значения функции не существует.
4. *Парабола имеет с осями координат общую точку* $(0; 0)$ — *начало координат.*
5. *Нулем функции является значение* $x = 0$.
6. *Функция четная.*
7. *На промежутке* $[0; +\infty)$ *функция возрастает.*
   На промежутке $(-\infty; 0]$ *функция убывает.*
8. *Все точки параболы, кроме начала координат, лежат над осью абсцисс; значит,* $(-\infty; 0)$ *и* $(0; +\infty)$ — *промежутки знакопостоянства.*

Функция $y = x^3$

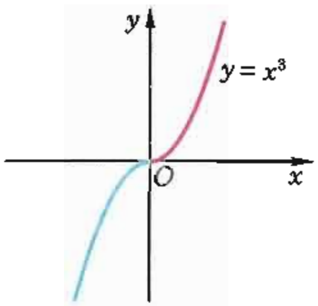


Рис. 92

График функции $y = x^3$ называется *кубической параболой* (рис. 92).

Свойства функции $y = x^3$.

1. *Областью определения функции является множество всех действительных чисел* R.
2. *Множеством значений функции является промежуток* $(-\infty; +\infty)$, *т. е. множество* R.

3. *Наименьшего и наибольшего значения функции не существует.*
4. *Кубическая парабола имеет с осями координат общую точку* $(0; 0)$ — *начало координат.*
5. *Нулем функции является значение* $x = 0$.
6. *Функция нечетная.*
7. *Функция возрастающая в области определения.*
8. *Кубическая парабола, лежит в I и III координатных углах. Таким образом,* $(-\infty; 0)$ *и* $(0; +\infty)$ — *промежутки знакопостоянства.*

Функция $y = \sqrt{x}$

График функции $y = \sqrt{x}$ изображен на рисунке 93.

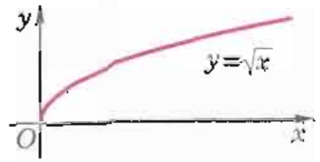


Рис. 93

Свойства функции $y = \sqrt{x}$

1. *Областью определения функции является промежуток* $[0; +\infty)$.
2. *Множеством значений функции является промежуток* $[0; +\infty)$.
3. *Наименьшее значение функция принимает в точке* $x = 0$, — *оно равно нулю. Наибольшего значения функции не существует.*
4. *График функции имеет с осями координат общую точку* $(0; 0)$ — *начало координат.*
5. *Нулем функции является значение* $x = 0$.
6. *Функция не является ни четной, ни нечетной.*
7. *Функция возрастающая в области определения.*
8. *Все точки графика функции, кроме* $(0; 0)$, *лежат в I координатном угле. Таким образом,* $(0; +\infty)$ — *промежуток знакопостоянства.*

Обратная пропорциональность

Обратной пропорциональностью называется функция вида $y = \frac{k}{x}$ (k — число, $k \neq 0$).

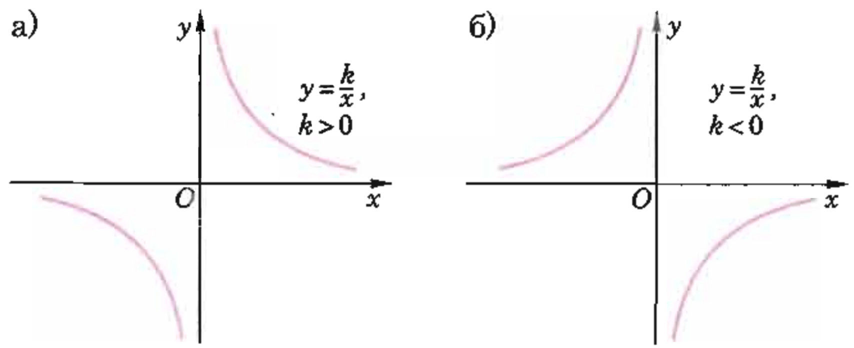


Рис. 94

График обратной пропорциональности называется *гиперболой* (рис. 94).

Свойства обратной пропорциональности $y=\frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$

1. ***Областью определения функции является*** $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$.
2. ***Множеством значений функции является вся числовая прямая, кроме точки*** $y=0$, ***т. е.*** $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$.
3. ***Наибольшего и наименьшего значения функции не существует.***
4. ***При любом значении аргумента*** x ***значение функции*** $y \neq 0$, ***т. е. гипербола не пересекает ось абсцисс.***
5. ***Нулей функция не имеет.***
6. ***Функция нечетная.***
7. ***При*** $k>0$ ***функция убывающая на промежутке*** $(-\infty;\ 0)$ ***и убывающая на промежутке*** $(0;\ +\infty)$.
   При $k<0$ ***функция возрастающая на промежутке*** $(-\infty;\ 0)$ ***и возрастающая на промежутке*** $(0;\ +\infty)$.
8. ***Если*** $k>0$, ***то ветви гиперболы располагаются в I и III координатных углах, если*** $k<0$, ***то ветви гиперболы располагаются во II и IV координатных углах. Таким образом,*** $(-\infty;\ 0)$ ***и*** $(0;\ +\infty)$ ***— промежутки знакопостоянства.***

Квадратичная функция

Квадратичной функцией называется функция вида $y=ax^2+bx+c$ (a, b, c — числа, $a \neq 0$).

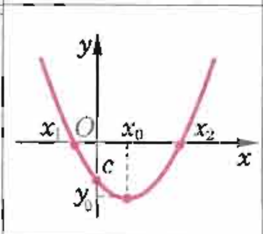
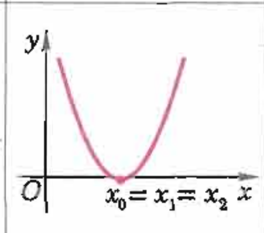
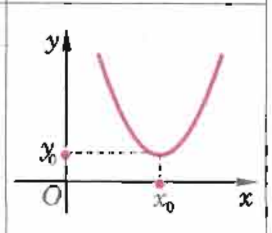
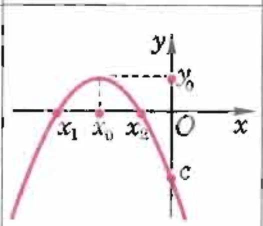
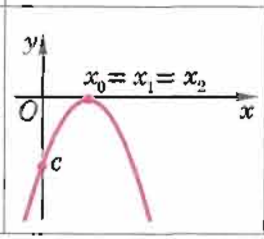
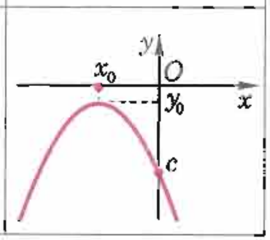
График квадратичной функции называется *параболой*.

Графиком функции является парабола с осью симметрии $x=-\frac{b}{2a}$, ***вершиной в точке с координатами:*** $x_0=-\frac{b}{2a}$; $y_0=\frac{4ac-b^2}{4a}$ ***и ветвями, направленными вверх, если*** $a>0$, ***и вниз, если*** $a<0$.

Свойства квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$ $(a \neq 0)$

1. ***Областью определения функции является множество всех действительных чисел*** R.
2. ***Если*** $a>0$, ***то множество значений функции — промежуток*** $\left[\frac{4ac-b^2}{4a};\ +\infty\right)$;
   если $a<0$, ***то множество значений функции — промежуток*** $\left(-\infty;\ \frac{4ac-b^2}{4a}\right]$.
3. ***Если*** $a>0$, ***то при*** $x=-\frac{b}{2a}$ ***функция принимает свое наименьшее значение*** $y_{\text{наим}}=\frac{4ac-b^2}{4a}$;
   если $a<0$, ***то при*** $x=-\frac{b}{2a}$ ***функция принимает свое наибольшее значение*** $y_{\text{наиб}}=\frac{4ac-b^2}{4a}$.
4. ***График функции имеет единственную точку пересечения с осью*** Oy — $(0;\ c)$.
   Если $D=b^2-4ac>0$, ***то ось*** Ox ***парабола пересекает в двух точках*** $\left(\frac{-b-\sqrt{D}}{2a};\ 0\right)$ ***и*** $\left(\frac{-b+\sqrt{D}}{2a};\ 0\right)$; ***если*** $D=0$, ***то точка*** $\left(-\frac{b}{2a};\ 0\right)$ ***— единственная точка пересечения с осью*** Ox; ***если*** $D<0$, ***то точек пересечения с осью*** Ox ***нет.***

5. *При* $D > 0$ *нулями функции являются значения* $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$; *при* $D = 0$ *нулем функции является значение* $x = \frac{-b}{2a}$; *функция не имеет нулей при* $D < 0$.
6. *Если* $b \neq 0$, *то функция не является ни четной, ни нечетной. Если* $b = 0$, *то функция четная.*
7. *Если* $a > 0$, *то функция убывает на промежутке* $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$ *и возрастает на промежутке* $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$.
   Если $a < 0$, *то функция убывает на промежутке* $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$ *и возрастает на промежутке* $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$.
8. *Если* $D \geqslant 0$, *то промежутки* $(-\infty; x_1)$, $(x_1; x_2)$, $(x_2; +\infty)$ *являются промежутками знакопостоянства.*
   Если $D < 0$, *то промежутком знакопостоянства является вся область определения* $\boldsymbol{R}$.

a \ D	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

Числовые последовательности

Пусть по некоторому закону каждому натуральному числу n ставится в соответствие определенное действительное число a_n. Тогда говорят, что задана *числовая последовательность* $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — ее обозначают (a_n). Число a_n называется *n-м членом* последовательности (a_n).

Любая числовая последовательность задает некоторую функцию на множестве натуральных чисел.

Арифметическая прогрессия с разностью d — это такая числовая последовательность (a_n), что $a_{n+1} = a_n + d$ для любого натурального n.

Формула n-го члена арифметической прогрессии:

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Формулы суммы первых n членов арифметической прогрессии:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n; \qquad S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2}.$$

Геометрическая прогрессия со знаменателем $q \neq 0$ — это такая числовая последовательность (b_n), что $b_{n+1} = b_n q$ для любого натурального n.

Формула n-го члена геометрической прогрессии: $b_n = b_1 q^{n-1}$.

Формулы суммы первых n членов геометрической прогрессии:

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}, \text{ если } q \neq 1; \qquad S_n = nb_1, \text{ если } q = 1.$$

Геометрическая прогрессия со знаменателем $|q| < 1$ называется *бесконечно убывающей*.

Формула суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$S = \frac{b_1}{1-q}.$$

Упражнения для повторения арифметического и алгебраического материала курса математики 5—10-х классов

1. Алгебраические выражения

Найдите значение выражения (П. 1—П. 9).

П. 1. 1) $\dfrac{\left(2\frac{7}{12} - 3\frac{5}{8}\right) \cdot \left(3\frac{4}{9} - 5\frac{1}{6}\right)}{5\frac{2}{3} - 2\frac{3}{4} + 1\frac{7}{18}}$; 2) $\dfrac{\left(5\frac{7}{24} - 6\frac{3}{16}\right) : \left(2\frac{8}{15} - 3\frac{5}{9}\right)}{5\frac{1}{5} + \frac{7}{15} - 5\frac{1}{23}}$.

П. 2. 1) $\dfrac{2,(8) \cdot 3,1(2) + 4\frac{3}{5}}{3,(3) + 1,5^{-1}}$; 2) $\dfrac{2,1(3) \cdot 3,(5) + 7\frac{5}{6}}{12,4(2) - 2,5^{-1}}$.

П. 3. 1) $\dfrac{12,2^2 - 24,4 \cdot 2,2 + 2,2^2}{4,2^3 + 17,4 \cdot 4,2^2 + 12,6 \cdot 5,8^2 + 5,8^3}$;

2) $\dfrac{3,8^3 - 2,4 \cdot 3,8^2 + 11,4 \cdot 0,8^2 - 0,8^3}{2,4^2 + 1,2 \cdot 2,4 + 0,6^2}$.

П. 4. 1) $\dfrac{14,8 - 6,91(6) + 12,75 - 7,1(3)}{10,(6) - 3,91(6)} + 2,(6) \cdot 3,75$;

2) $\dfrac{1,5625 \cdot 3,2 + 16,(6) - 9 : 2,4}{17,58(3) - 6,(3)} + \dfrac{12,(6) - 61,5 : 6,75}{2,(6)}$.

П. 5. 1) $\dfrac{|2,7 - 3,58| \cdot 1,5^{-1}}{1\frac{2}{3} + 4\frac{1}{5}}$; 2) $\dfrac{|3,92 - 9,68| \cdot 4,5}{\left(\frac{5}{12}\right)^{-2} \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{-1}}$.

П. 6. 1) $\dfrac{\left(\sqrt{2\frac{7}{9}}\right)^3 + \left(\frac{3}{7}\right)^{-2} \cdot \frac{5}{7}}{0,25^0 - 3^{-1}}$; 2) $\dfrac{\left(\sqrt{1\frac{32}{49}}\right)^{-1} + 1,5^{-2} \cdot 0,5}{(2,75^0 + 0,125^{-1})^{-1}}$.

П. 7. 1) $\dfrac{\sqrt{137^2 - 37^2}}{\sqrt{24} \cdot \sqrt{261}}$; 2) $\dfrac{\sqrt{259^2 - 185^2}}{\sqrt{62} \cdot \sqrt{197}}$.

П. 8. 1) $\dfrac{9 - 4\sqrt{5}}{2 - \sqrt{5}} + 3 + \sqrt{5}$;

2) $\dfrac{23 - 8\sqrt{7}}{4 + \sqrt{7}} - 3 - \sqrt{7}$;

3) $\sqrt{83 + 18\sqrt{2}} - \sqrt{2}$;

4) $\sqrt{21 - 8\sqrt{5}} + \sqrt{5}$;

5) $\sqrt{37 - 12\sqrt{7}} + 5 - 2\sqrt{7}$;

6) $\sqrt{28 + 16\sqrt{3}} + 3 - 2\sqrt{3}$.

П. 9. 1) $(-1,4)^{-5} : \left(-\frac{5}{7}\right)^6$; 2) $\dfrac{(-1)^5 \cdot (3^4 + 3^2)^2}{(-9)^3}$;

3) $2^2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \cdot 4 : \frac{1}{2^3}$; 4) $9 \cdot 27^{-1} \cdot (3^2)^3 : \left(\frac{1}{3^{-2}} : \frac{1}{81}\right)$.

Упростите выражение (П. 10 — П. 11).

П. 10. 1) $\frac{2}{3}\sqrt{125} + \frac{4}{7}\sqrt{5} - 5\sqrt{27} - \frac{5}{6}\sqrt{3}$;

2) $5\sqrt{32} - 4\sqrt{50} + \frac{1}{3}\sqrt{18} - 2\sqrt{7} + \frac{1}{3}\sqrt{63}$.

П. 11. 1) $\sqrt[4]{32} - \sqrt[4]{162} \cdot \sqrt{16}$;

2) $\sqrt[5]{32} - \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{3}$.

П. 12. Найдите значение выражения:

1) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}} \cdot \sqrt[5]{\frac{2}{3} \cdot \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^{-4}}}$;

2) $40 \cdot \sqrt{\frac{9}{16} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{4}{3}\right)^{-6}}} : \sqrt{2\frac{1}{4}}$.

П. 13. Сравните значения выражений:

1) $2006^2 + 2003^2$ и $2004^2 + 2005^2$;

2) $2222^2 + 1111^2$ и $2221^2 + 1112^2$;

3) $4\sqrt{405}$ и $7\sqrt{125}$; 4) $5\sqrt{176}$ и $7\sqrt{99}$;

5) $3^{-\frac{2}{5}}$ и $1^{-\frac{2}{5}}$; 6) $\sqrt[3]{\left(\frac{2}{7}\right)^{-8}}$ и $\sqrt[3]{\left(\frac{3}{8}\right)^{-8}}$.

Освободитесь от иррациональности в знаменателе (П. 14 — П. 15).

П. 14. 1) $\dfrac{15}{\sqrt{3}}$; 2) $\dfrac{25}{\sqrt{10}}$; 3) $\dfrac{2}{\sqrt{6}}$;

4) $\dfrac{8}{\sqrt[4]{125}}$; 5) $\dfrac{4}{\sqrt[4]{8}}$; 6) $\dfrac{1}{\sqrt{a+b}}$;

7) $\dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{5}}{\sqrt{6} - \sqrt{5}}$; 8) $\dfrac{\sqrt{5} + 1}{3\sqrt{5} - 4}$; 9) $\dfrac{a - 81}{9 - \sqrt{a}}$;

10) $\dfrac{m - n}{\sqrt{mn} - n}$, $n > 0$.

П. 15. 1) $\dfrac{2}{2 - \sqrt{2}}$; 2) $\dfrac{6}{3 + \sqrt{3}}$; 3) $\dfrac{11}{4 + 3\sqrt{3}}$;

4) $\dfrac{12}{6 - 2\sqrt{6}}$; 5) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3}}$; 6) $\dfrac{10}{\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{5}}$;

7) $\dfrac{3}{2 - \sqrt[3]{2}}$; 8) $\dfrac{8}{3 + \sqrt[3]{5}}$; 9) $\dfrac{4}{\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{4}}$.

П. 16. 1) Упростите выражение $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+9-6a}}$ и найдите его значение при $a=-10$.

2) Упростите выражение $\dfrac{1}{\sqrt{16+a^2-8a}}$ и найдите его значение при $a=-2$.

Упростите выражение (П. 17 — П. 25).

П. 17. 1) $\sqrt{(\sqrt{6}-6)^2}+\sqrt{(1-\sqrt{6})^2}$;

2) $\sqrt{(1-\sqrt{5})^2}+\sqrt{(\sqrt{5}-5)^2}$.

П. 18. 1) $\sqrt{6+6a^2+\sqrt{a^8+6a^4+9}}$;

2) $\sqrt{4+6a^2+\sqrt{a^8+10a^4+25}}$.

П. 19. 1) $\sqrt{8+2\sqrt{7}}$; 2) $\sqrt{7-2\sqrt{6}}$; 3) $\sqrt{10-4\sqrt{6}}$;

4) $\sqrt{37-20\sqrt{3}}$; 5) $\sqrt{9+4\sqrt{5}}$; 6) $\sqrt{21-8\sqrt{5}}$.

П. 20. 1) $\sqrt{8+2\sqrt{7}}+\sqrt{11-4\sqrt{7}}$; 2) $\sqrt{15-6\sqrt{6}}-\sqrt{15+6\sqrt{6}}$.

П. 21. 1) $\left(\dfrac{8a^{-2}}{b^{-3}}\right)\cdot\left(\dfrac{b^{-2}}{10^{-3}}\right)^2$; 2) $\left(-\dfrac{9a^4}{2b^3}\right)^{-3}\cdot\left(\dfrac{4b^4}{27a^5}\right)^{-2}$.

П. 22. 1) $\dfrac{(a^{-2}+b^{-2})\cdot b^3}{b^{-1}\cdot(a^2+b^2)^2}$; 2) $\left(\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1}+\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-2}\right)\cdot\left(\dfrac{b}{a}\right)^{-2}$.

П. 23. 1) $\dfrac{10}{4a^2-25b^2}-\dfrac{b}{5b^2-2ab}-\dfrac{5}{4a^2+10ab}$;

2) $\dfrac{2a+3b}{2a^2-3ab}+\dfrac{2a-3b}{2a^2+3ab}+\dfrac{16a}{9b^2-4a^2}$;

3) $\dfrac{8x^2-2x+6}{8x^3+1}-\dfrac{2x-1}{2x-4x^2-1}-\dfrac{3}{2x+1}$;

4) $\dfrac{y^2}{x^2+xy+y^2}+\dfrac{x}{x-y}+\dfrac{4x^2y-xy^2}{y^3-x^3}$.

П. 24. 1) $\left(\dfrac{x^5+x^2y^3}{x^3+x^2y}-xy\right):(x-y)-x$;

2) $\left(\dfrac{x^5-x^2y^3+x^2y}{x^2y}-1\right)\cdot\left(1+\dfrac{x}{y}+\dfrac{x^2}{y^2}\right)^{-1}$;

3) $\left(\dfrac{(x^2+y^2)^3+2x^6-y^6}{(x^2+y^2)^3-x^6+2y^6}\right)^4:\left(\dfrac{x}{y}\right)^{-6}\cdot\dfrac{y^3}{x^3}$;

4) $\left(\dfrac{x^3y^9+x^9y^3}{x^6+y^6}+\dfrac{1-x^6y^6}{x^3y^3}\right)\cdot\left(\dfrac{x^{12}-x^4}{x^4-1}-\dfrac{x^{12}+x^8}{x^4+1}\right)$.

П. 25. 1) $\left(\dfrac{1}{\sqrt[6]{a}-1}-\dfrac{\sqrt[6]{a}+1}{\sqrt[3]{a}}\right):\dfrac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a}-2\sqrt[6]{a}+1}$;

2) $\left(\dfrac{\sqrt[3]{9a^2}-\sqrt[3]{25b^2}}{\sqrt[3]{3a}+\sqrt[3]{5b}}+\sqrt[3]{5b}\right)^2:a$.

2. Уравнения и системы уравнений

Решите уравнение (П. 26 — П. 27).

П. 26. 1) $1{,}8(15-15x)+(2{,}3x-11)=12{,}4-23{,}5x$;

2) $2{,}2(7x+14)-6(32{,}5x-91)=8(3{,}2x+174{,}7)$;

3) $2\frac{3}{5}:3\frac{2}{7}=\frac{21}{23}x:\frac{15}{26}$; 4) $13\frac{1}{2}:4\frac{2}{9}=2\frac{5}{38}:x$;

5) $\dfrac{5x-4}{7}+\dfrac{2x+26}{8}+\dfrac{3}{14}=0$; 6) $\dfrac{1-7x}{3}-\dfrac{x+2}{5}+10{,}2=0$.

П. 27. 1) $||2x-3|+4|=8$; 2) $||3x+7|-12|=3$.

П. 28. Верно ли, что 2 является корнем уравнения:

1) $x^2-3x+2=0$; 2) $x^2-3x+2+\sqrt{x-3}=0$;

3) $x^2-3x+2+\dfrac{1}{x-2}=0$; 4) $x^2+2-3x-\sqrt{2-x}=0$;

5) $\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}=0$; 6) $(x^2-3x+2)^{x+2}=0$;

7) $(x^2+3x-2)^{x-2}=0$; 8) $(x^2-3x+2)^{x-2}=0$;

9) $x^2-3x+2=\dfrac{x-2}{\sqrt{2-x}}$; 10) $\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x-3}=0$;

11) $\dfrac{(x-2)^3}{x-2}=(x-2)^2$; 12) $\left(\dfrac{x^{228}-5x^{2006}}{(x+3)^{17}}\right)^{x-2}=0$?

П. 29. Верно ли, что 3 является корнем уравнения:

1) $x^2-x-6=0$; 2) $x^2-x-6+\sqrt{x-3}=0$;

3) $x^2-x-6+\dfrac{1}{x^2-9}=0$; 4) $x^2-6-x-\sqrt{1-x}=0$;

5) $\dfrac{x^2-x-6}{x^2-2x-3}=0$;   6) $(x^2-x-6)^{x+3}=0$;

7) $(x-3)^{x^2-x-6}=0$;   8) $(x^2-x-6)^{x-3}=0$;

9) $x^2-x-6=\dfrac{3-x}{\sqrt{x-3}}$;   10) $\sqrt{2-x}\cdot\sqrt{x-3}=0$;

11) $\dfrac{(x-3)^3}{x-3}=(x-3)^2$;   12) $\dfrac{x+2}{x+3}+\dfrac{4}{x^2-9}=\dfrac{1}{x}$?

Решите уравнение (П. 30 — П. 32).

П. 30. 1) $\dfrac{2x-3}{3x-1,7}=1$;   2) $\dfrac{5-3x}{-2x+2,3}=1$;

3) $\dfrac{2x-8}{3x+5}=-5$;   4) $\dfrac{6x+4}{5+2x}=2$.

П. 31. 1) $x^2-4\sqrt{3}x+11=0$;   2) $x^2+2\sqrt{5}x-20=0$.

П. 32. 1) $\dfrac{5x^2-3x}{2}=7x-6$;   2) $\dfrac{3x^2+8x}{5}=4x+3$.

П. 33. 1) Один из корней уравнения $4x^2-px+21=0$ равен 0,5. Найдите второй корень уравнения и значение p.
2) Один из корней уравнения $px^2-53x-28=0$ равен 4. Найдите второй корень уравнения и значение p.

П. 34. 1) Укажите значения x, при которых трехчлены $5x^2+28x+3$ и $6x^2+43x+27$ принимают противоположные значения.
2) Укажите значения x, при которых трехчлены $3x^2+x-5$ и $2x^2-10x+3$ принимают противоположные значения.

П. 35. 1) Трехчлены $2x^2+px-15$ и $3x^2+2x+q$ имеют общий корень -5. Укажите значения x, отличные от -5, при которых оба трехчлена принимают противоположные значения.
2) Трехчлены x^2-x+p и $qx^2-8x-21$ имеют общий корень 3. Есть ли такие значения x, при которых значение первого трехчлена больше значения второго на 13? Если да, то укажите эти значения x.

Решите уравнение (П. 36 — П. 39).

П. 36. 1) $(x-2)^2+3(x-2)=40$;   2) $(2x+3)^2+7(2x+3)=8$.

П. 37. 1) $x^4-13x^2+36=0$;   2) $x^4-25x^2+144=0$;
3) $4x^4+7x^2-2=0$;   4) $3x^4-4x^2+1=0$.

П. 38. 1) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x^2-3x+2}=2$;

2) $\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{5}{x+1}-\dfrac{15}{x^2-x-2}=\dfrac{1}{10}$;

3) $\dfrac{5}{2x-3}+\dfrac{6}{3x+4}-\dfrac{42,5}{6x^2-x-12}=1$;

4) $\dfrac{7}{x+5}+\dfrac{2}{x-3}-\dfrac{16}{2x+x^2-15}=4$.

П. 39. 1) $\dfrac{3}{x+7}+\dfrac{12}{x-9}=\dfrac{3(5x+19)}{x^2-2x-63}$;

2) $\dfrac{5}{x^2-x-6}+\dfrac{8}{x^2-2x-3}=\dfrac{3}{x-3}$;

3) $\dfrac{5x+2}{x^2+x-2}+\dfrac{x+3}{x^2-4x+3}+\dfrac{2x-21}{x^2-x-6}=0$;

4) $\dfrac{x-1}{x^2+9x+20}+\dfrac{2x-5}{x^2+7x+12}+\dfrac{3(x+9)}{x^2+8x+15}=0$;

5) $\dfrac{9}{x^3+4x^2+x-6}+\dfrac{5}{x^2+2x-3}+\dfrac{3}{x^2+5x+6}=0$;

6) $\dfrac{7}{x^2-5x+6}+\dfrac{8}{x^2+5x+6}-\dfrac{160}{x^3-3x^2-4x+12}=0$.

П. 40. 1) Найдите такие значения x, при которых разность дробей $\dfrac{2x+11}{12x-69}$ и $\dfrac{6x+10}{17-8x}$ равна 3.
2) Найдите такие значения x, при которых сумма дробей $\dfrac{5x-3}{2x+4}$ и $\dfrac{7x+8}{3x-16}$ равна 7.

Решите уравнение (П. 41 — П. 47).

П. 41. 1) $\sqrt{x-2}(x^2+5x+6)=0$;
2) $(3x^2-13x-10)\sqrt{2x-6}=0$;

3) $\dfrac{x\sqrt{x+5}}{x^2+2x-15}=0;$

4) $\dfrac{(25-x^2)\sqrt{x^2+6x}}{3x^2+16x-12}=0.$

П. 42. 1) $x-4\sqrt{x}+3=0;$ 2) $x-3\sqrt{x}+2=0;$
3) $x-5\sqrt{x}+4=0;$ 4) $x-17\sqrt{x}+66=0;$
5) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}-2=0;$ 6) $\sqrt[3]{x}-5\sqrt[6]{x}=6;$
7) $\sqrt{x}+2\sqrt[4]{x}=3;$ 8) $\sqrt{x}-3\sqrt[4]{x}+2=0.$

П. 43. 1) $\sqrt{x+2}=x;$ 2) $\sqrt{x+1}=x-5;$
3) $x+\sqrt{3x+7}=7;$ 4) $x-\sqrt{15-3x}=-1;$
5) $\sqrt{x^2-36}=\sqrt{2x-1};$ 6) $\sqrt{8-5x}=\sqrt{x^2-16};$
7) $\sqrt{x-2}=\dfrac{x-1}{\sqrt{3x-5}};$ 8) $\dfrac{x+2}{\sqrt{3x+4}}=\sqrt{x+1}.$

П. 44. 1) $|x^2-x-6|=0;$ 2) $|x^2+6x-8|=8;$
3) $|x^2-2x+39|=24;$ 4) $|x^2-x+34|=22;$
5) $|8x^2-4x+1|=|3x^2+9x-7|;$
6) $|4x^2-41x+150|=|-16x^2+29x+90|.$

П. 45. 1) $x^2-5|x|+6=0;$ 2) $x^2-|x|-72=0;$
3) $2x^2+7|x|+3=0;$ 4) $-3x^2-13|x|+10=0.$

П. 46. 1) $25x^2+15x+4=2|10x+3|;$
2) $3x^2-4x-3=|3x-7|;$
3) $|2x^2+11x+14|=-2-x;$
4) $|2x^2+7x+1|=3x+7;$
5) $2|2x^2+7x+1|=6x+7;$
6) $|2x^2+3x-29|=7x+1;$
7) $|3x^2-8x+9|=-3(x^2-13);$
8) $|5x^2-13x+6|=-6-x^2.$

П. 47. 1) $|x^2-5x+4|=5x-x^2-4;$
2) $|x^2+3x+2|=3x+x^2+2.$

Решите систему уравнений (П. 48 — П. 52).

П. 48. 1) $\begin{cases}2(3x-4y)=7(5x+3y)-87,\\7x-13y=1;\end{cases}$

2) $\begin{cases}5(4x+9y)+250=17(2x+5y),\\3x+2y=1.\end{cases}$

П. 49. 1) $\begin{cases}\dfrac{x}{y}=\dfrac{2}{3},\\\dfrac{2-3y}{3x+2y}=-\dfrac{25}{36};\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{3x+17},\\\dfrac{2x-1}{11}=\dfrac{3y+4}{25}.\end{cases}$

П. 50. 1) $\begin{cases}(x+3y)(x-2y)=24,\\\dfrac{x-2y}{x+3y}=1{,}5;\end{cases}$

2) $\begin{cases}(7x-4y)(4x-7y)=6,\\\dfrac{7x-4y}{4x-7y}=1{,}5.\end{cases}$

П. 51. 1) $\begin{cases}x^2+y^2+3xy=-1,\\x+2y=0;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x^2-y^2-xy=29,\\2y-x=7;\end{cases}$

3) $\begin{cases}x^2+y^2-2xy=9,\\y-3x=1;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x^2+2xy+y^2=4,\\5x-7y=10.\end{cases}$

П. 52. 1) $\begin{cases}x^2+2xy+y^2+x+y-6=0,\\x^2-2xy+y^2-x+y-6=0;\end{cases}$

2) $\begin{cases}x^2+y^2-7xy=55,\\9xy+x+y=-55.\end{cases}$

П. 53. 1) При каких значениях a система уравнений $\begin{cases}2x-ay=5,\\4x+6y=2\end{cases}$ имеет решение, удовлетворяющее неравенству $x-y<3$?

2) При каких значениях a система уравнений $\begin{cases}ax+4y=7,\\5x+8y=9\end{cases}$ имеет решение, удовлетворяющее неравенству $2x+3y>4$?

П. 54. При каких значениях a уравнение:

1) $(x-a)(ax^2+6x+5a)=0$;
2) $(ax-1)(2x^2-x-a)=0$

имеет ровно два различных корня?

П. 55. При каких значениях a уравнение:

1) $\sqrt{3x+a}=\sqrt{x^2-2ax+a}$;
2) $\sqrt{2x-a}=\sqrt{x^2+3ax-a}$

имеет два различных корня?

3. Неравенства и системы неравенств

Решите неравенство (П. 56 — П. 59).

П. 56. 1) $7(3x-17)-5(4+x)>5$;
2) $13(15-2x)-9(3x-23)<-22$;
3) $\frac{3(5x-8)}{7}+13\geqslant 1$; 4) $\frac{x-1}{7}+\frac{3x+1}{5}\leqslant 6$.

П. 57. 1) $x^2-10x+21<0$; 2) $3x^2-14x+16\leqslant 0$;
3) $5x^2-6x+1\geqslant 0$; 4) $x^2-8x+16>0$;
5) $x^2-5x+16<0$; 6) $x^2+12x+21<0$.

П. 58. 1) $(x+8)(x-1,5)<0$; 2) $(15-2x)(x+6)>0$;
3) $(x^3-64)(-x^2-1)\geqslant 0$; 4) $x^2(x-7)(x+2)\leqslant 0$;
5) $\frac{(x-1)(x-2)(x+2)^3x^2}{(x-1)(x+1)(x-3)^4}\geqslant 0$; 6) $\frac{x^3-x^2-5x-3}{x^2+3x+2}\geqslant 0$.

П. 59. 1) $\frac{12-x}{x+14}>0$; 2) $\frac{10-6x}{2x-0,5}\leqslant 0$; 3) $\frac{x^2-6x}{x^2+6x+9}\leqslant 0$;
4) $\frac{x^2+9x+20}{x+4}>0$; 5) $\frac{x^2-3}{x^2-1}\geqslant 0$; 6) $\frac{2x^2+16x-3}{x^2+8x}>2$.

П. 60. Найдите естественную область определения выражения:

1) $\sqrt{(x+8)(5-x)}$; 2) $\sqrt{(x+10)(x-2)(x-4)}$;
3) $\sqrt{x-\frac{15}{x+2}}$; 4) $\sqrt{x^3-x}$;
5) $\sqrt{x+4+\frac{3}{x}}$; 6) $\sqrt{-\frac{2x}{3-x}}$;

7) $\frac{\sqrt{x-1}}{x^2-6x+5}$; 8) $\frac{1}{x+5}-\sqrt{x+5}$;
9) $\sqrt{\frac{x^4+x^2+3}{-x^2+x+2}}$.

Решите неравенство (П. 61 — П. 66).

П. 61. 1) $\left(\frac{5x+26}{4x^2-25}-\frac{1}{2x-5}\right)\cdot\frac{25+10x}{3x+12}+\frac{2x}{5-2x}\geqslant 0$;
2) $\left(\frac{2x+1}{9x^2-16}+\frac{1}{3x+4}\right):\frac{5x-3}{16-12x}-\frac{3x}{3x+4}\leqslant 0$;
3) $\frac{x}{3x+2}-\frac{3x^2}{9x^2-6x+4}-4\cdot\frac{x-24}{27x^3+8}<0$;
4) $\frac{5x}{2x-3}-\frac{10x^2}{4x^2+6x+9}-\frac{59x^2+250}{8x^3-27}>0$.

П. 62. 1) $\frac{(x+2)^3(x-4)^2}{(x+5)^7(x-2)^5}>0$; 2) $\frac{(x+7)^{11}(x+9)^{12}}{(x-6)^{24}(x-8)^{25}}<0$;
3) $\frac{(x-1,2)^8(3-x)^5}{(x-1,5)^{11}(x+3,6)^{13}}\leqslant 0$; 4) $\frac{(x+9)^{17}(2+4x)^6}{(3x+9)^3(6-4x)^2}\geqslant 0$.

П. 63. 1) $|x+8|>4$; 2) $|2x-6|<10$;
3) $|4-2x|\leqslant 8$; 4) $|9+3x|\geqslant 1$;
5) $|5x+2,4|>-2$; 6) $|8-3x|<-4$.

П. 64. 1) $\sqrt{4x^2+9-12x}<4$; 2) $\sqrt{9x^2+4+12x}>5$;
3) $\sqrt{25x^2+10x+1}\geqslant 4$; 4) $\sqrt{4+49x^2-28x}\leqslant 9$.

П. 65. 1) $\sqrt{x-2}>3$; 2) $\sqrt{x+4}<7$;
3) $\sqrt{5-2x}>4$; 4) $\sqrt{2-6x}<5$;
5) $\sqrt{4x-12}>-9$; 6) $\sqrt{3x+9}<-2$.

П. 66. 1) $\sqrt{x+15}\leqslant 5-x$; 2) $x+2\geqslant\sqrt{14-5x}$;
3) $\sqrt{x^2+2x-8}<12-2x$; 4) $\sqrt{x^2-10x+16}<2x+4$;
5) $\sqrt{\frac{x+4}{5x-8}}\geqslant\sqrt{2x-1}$; 6) $\sqrt{\frac{x+5}{x+2}}\leqslant\sqrt{3x-1}$.

П. 67. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases}|x| \geqslant 1,\\ |x-1| < 3;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}|x-3| \geqslant 4,\\ |x| \leqslant 2,\end{cases}$ 3) $\begin{cases}|2-x| \leqslant 3,\\ |x+1| > 1.\end{cases}$

П. 68*. Решите систему неравенств относительно x:

1) $\begin{cases}x < 2,\\ x > a;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x^2 < 9,\\ x \geqslant a;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}x^2 - 25 \geqslant 0,\\ x < a.\end{cases}$

П. 69. Решите двойное неравенство:

1) $1 < \frac{1+x}{1-x} \leqslant 2;$ 2) $0 < x^2 + 6x \leqslant 7;$

3) $x < x^2 + 20 \leqslant 9x.$

П. 70. Найдите естественную область определения выражения:

1) $\frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{3x-6}};$ 2) $\frac{2}{\sqrt{4-x}} + \sqrt{\frac{x+1}{x-1}};$

3) $\sqrt{9-x^2} + \sqrt{\frac{x}{x-2}};$ 4) $\sqrt{x^2-5x-14} + \frac{1}{\sqrt{x^2-4}};$

5) $\left(\sqrt[6]{x+7}-3\right)\left(\sqrt{3-x}+7\right);$

6) $\sqrt{2-|x-5|} + \frac{1}{\sqrt{|x-6|-1}-1}.$

П. 71. Докажите, что:

1) если $a + b = 4$, то $a^2 - 2b \geqslant -9;$

2) если $a - b = 4$, то $a^2 + b^2 \geqslant 8.$

П. 72. Докажите неравенство:

1) $a^2 + b^2 \geqslant \frac{(a+b)^2}{2};$ 2) $\frac{2}{(a+b)^2} \geqslant \frac{1}{a^2+b^2};$

3) $a^2 + b^2 \geqslant 2ab;$ 4) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 \leqslant 2(a+b).$

4. Функции

П. 73. Задайте формулой линейную функцию, график которой:

1) параллелен графику функции $y = -2x + 17$ и проходит через точку с координатами $(-5; 11)$;

2) симметричен графику функции $y = 5x - 8$ относительно начала координат.

П. 74. 1) Функция задана формулой $y = 2x - 3$. Есть ли на графике функции точка, абсцисса которой равна утроенной ординате? Если да, то определите координаты этой точки.

2) Функция задана формулой $y = 5x + 4$. Есть ли на графике функции точка, абсцисса которой на 2 больше ее ординаты? Если да, то определите координаты этой точки.

П. 75. Укажите координаты точек, в которых прямая $y = \frac{4}{3}x$ пересекает окружность с центром в начале координат и с радиусом, равным:

1) 5; 2) 4.

П. 76. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции, заданной формулой:

1) $y = 2x - 4$ на промежутке $[3; 6]$;

2) $y = -3x + 4$ на промежутке $[-8; -5]$.

П. 77. 1) Задайте формулой функцию, график которой симметричен графику функции $y = 3x + 5$ относительно оси Ox.

2) Задайте формулой функцию, график которой симметричен графику функции $y = -5x + 10$ относительно оси Oy.

П. 78. 1) Функция задана формулой $y = 3x - 4$. Как изменится значение y, если значение x увеличится на 2?

2) Функция задана формулой $y = -9x + 8$. Как изменится значение y, если значение x увеличится на 3?

П. 79. 1) График функции $y = kx - 4$ проходит через точку $A(2; 21)$. Составьте уравнение линейной функции, график которой проходит через точку $B(-3;\ 5)$ и параллелен графику данной функции.

2) График функции $y = kx + b$ проходит через точки $M(1;\ -5)$ и $N(4;\ 1)$. Составьте уравнение линейной функции, график которой проходит через точку $K(1;\ 7)$ и параллелен графику данной функции.

П. 80. 1) График функции $y = kx - 4$ проходит через точку $A(1;\ 1)$ и пересекает график функции $y = 2x + b$ в точке, абсцисса которой равна 3. Найдите значение b.

2) График функции $y = -7x + b$ проходит через точку $C(-1;\ 15)$ и пересекает график функции $y = kx - 2$ в точке, ордината которой равна 1. Найдите значение k.

П. 81. 1) При каком значении x функция $y = x^2 - 2x - 1$ принимает наименьшее значение?

2) При каком значении x функция $y = 4x - 4x^2 - 1$ принимает наибольшее значение?

П. 82. 1) График линейной функции $y = kx + 11$ проходит через вершину параболы $y = 3x^2 - 18x + 5$. Найдите значение k.

2) График линейной функции $y = 7x + b$ проходит через вершину параболы $y = -5x^2 + 20x - 19$. Найдите значение b.

П. 83. 1) Наименьшее значение функции $y = ax^2 + bx + c$, равное 1, достигается при $x = 2$. Найдите значения a, b, c, если график функции проходит через точку $P(3;\ 3)$.

2) Наибольшее значение функции $y = ax^2 + bx + c$, равное 17, достигается при $x = 2$. Найдите значения a, b, c, если график функции проходит через точку $T(3;\ 14)$.

П. 84. 1) Найдите координаты точек пересечения параболы $y = x^2 + 4$ и прямой $x + y = 6$.

2) Найдите координаты точек пересечения окружности $x^2 + y^2 = 36$ и параболы $y = x^2 + 6$.

Изобразите график функции (П. 85 — П. 93).

П. 85. 1) $y = \frac{x}{5}$; 2) $y = \frac{x}{3} + 7$; 3) $y = -4x - 9$; 4) $x + y = 10$; 5) $y = 7(3 - x) + 3(x - 5)$; 6) $y = \frac{1}{3}(1 - 3x) + \frac{2}{3}(6x + 1)$.

П. 86. 1) $y = \frac{8}{x}$; 2) $y = -\frac{4}{x}$; 3) $y = \frac{6}{x + 1}$; 4) $y = \frac{6}{3 - x}$; 5) $xy = -9$; 6) $y = \frac{12 - 3x}{x}$.

П. 87. 1) $y = x^3$; 2) $y = -x^3$; 3) $y = x^3 + 6$; 4) $y = 4 - (x + 1)^3$; 5) $y = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$; 6) $y = (x - 1)(x^2 + x + 1)$.

П. 88. 1) $y = x^2$; 2) $y = -x^2$; 3) $y = -0{,}3(x + 2)^2$; 4) $y = 7(x - 4)^2$; 5) $y = 2(x + 1)^2 - 3$; 6) $y = -5(x - 2)^2 + 1$.

П. 89. 1) $y = -x^2 - 5x + 6$; 2) $y = x^2 - 4x + 5$; 3) $y = x^2 + 2x + 3$; 4) $y = -x^2 - x + 2$; 5) $y = (x + 4)^2 - 2(x + 1)^2$; 6) $y = (x - 1)^2 + (2x - 1)^2$.

П. 90. 1) $y = \sqrt{x}$; 2) $y = \sqrt{-x}$; 3) $y = -\sqrt{x}$; 4) $y = \sqrt{2x - 3}$; 5) $y = \sqrt{7 - 2x}$; 6) $y = 3\sqrt{x + 1} - 2$.

П. 91. 1) $y = |x|$; 2) $y = -|x|$; 3) $y = |x - 3| - 1$; 4) $y = |x + 1| - 2$; 5) $y = -|x + 2|$; 6) $y = 2 - |x - 1|$.

П. 92. 1) $y = \frac{1}{x^2}$; 2) $y = \frac{1}{x^3}$; 3) $y = \frac{1}{x^2} + 2$; 4) $y = \frac{1}{(x - 1)^2} - 1$; 5) $\frac{1}{(x + 3)^3}$; 6) $y = \frac{1}{(x + 1)^3} - 2$.

П. 93. 1) $y=\sqrt[4]{x}$; 2) $y=2-\sqrt[4]{x}$;

3) $y=1+\sqrt[4]{x-1}$; 4) $y=\sqrt[3]{x+3}$;

5) $y=2+\sqrt[3]{x+1}$; 6) $y=1-\sqrt[3]{x-2}$.

На координатной плоскости изобразите множество точек, заданных уравнением (П. 94—П. 95).

П. 94. 1) $x^2+(y-2)^2=4$; 2) $(x-1)^2+(y+2)^2=5$.

П. 95. 1) $(x-3)^2+(y+5)^2=0$; 2) $(x-3)(y+5)=0$.

П. 96. Решите систему уравнений, используя изображения графиков соответствующих функций:

1) $\begin{cases} y=-|x|, \\ y=x^3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y=x^2-7, \\ y=\frac{1}{x}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y=2-\frac{x}{3}, \\ y+\frac{4}{x}=0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2y-x+1=0, \\ y=x^2+2; \end{cases}$

5) $\begin{cases} y=x^3, \\ xy=5; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} y-3x+4=0, \\ y=-x^2+2. \end{cases}$

П. 97. Докажите, что график функции симметричен относительно оси Oy:

1) $y=(x-3)^4+x^2+(x+3)^4$;
2) $y=|x-4|+|x|+|x+4|$.

5. Текстовые задачи

П. 98. 1) Числитель несократимой дроби на 2 меньше знаменателя. Если знаменатель увеличить в 3 раза, а числитель — на 13, то сумма полученной дроби и данной будет равна дроби, обратной данной. Найдите данную дробь.

2) Знаменатель несократимой дроби на 3 меньше числителя. Если знаменатель увеличить в 7 раз, а числитель — на 26 и вычесть полученную дробь из данной дроби, то получится дробь, обратная данной. Найдите данную дробь.

П. 99. 1) Числитель положительной дроби на 11 меньше знаменателя. Если числитель увеличить на 139, а знаменатель — на 29, то получится дробь, обратная данной. Найдите дробь.

2) Сумма числителя и знаменателя положительной дроби равна 17. Если числитель увеличить на 31, а знаменатель на 37, то получится дробь, обратная данной. Найдите дробь.

П. 100. 1) В 10 А и 10 Б классах в два раза больше учеников, чем в 10 В. В 10 Б и 10 В классах в три раза больше учеников, чем в 10 А. В каком из трех классов наименьшее число учеников, а в каком — наибольшее?

2) Имеется три коробки — синяя, красная и белая — разной вместимости. Если удвоить объем синей коробки и утроить объем красной, то их общий объем превзошел бы объем белой коробки в 4 раза. А если объем синей коробки утроить и в пять раз увеличить объем белой коробки, то их общий объем в шесть раз превзойдет объем красной коробки. У какой коробки наименьший объем, а у какой — наибольший?

П. 101. 1) В типографии тираж книги упаковывают в пачки. Если в каждую пачку укладывать на 4 книги больше, то пачек окажется на 300 меньше, а если число книг в пачке уменьшить на 4, то пачек станет на 500 больше. Сколько книг в одной пачке и какой тираж книги?

2) На хлебозаводе в коробки укладывают одно и то же число пирожных. Если в каждую коробку укладывать на 2 пирожных меньше, то коробок потребуется на 6 больше, а если в каждый набор класть на 2 пирожных больше, то число коробок уменьшится на 5. Сколько всего изготовлено пирожных и сколько пирожных в одном наборе?

П. 102. 1) Коля старше Светы на один год. Произведение их возрастов равно 420, а сумма их возрастов на 5 меньше возраста Колиной мамы. Сколько ей лет?

2) Дачный участок Веры Павловны прямоугольной формы, причем полупериметр его равен 44 м, а площадь — 480 м^2. Каковы ширина и длина участка?

П. 103. 1) Между двумя классами распределили 18 билетов на концерт. Какое число билетов досталось каждому классу, если известно, что произведение этих чисел равно 72?

2) Степа для дневника наблюдений по географии записал температуру воздуха на улице в 6 ч и в 12 ч. Каковы могли быть показания термометра, если разность записанных чисел равна 3, а их произведение равно 54?

П. 104. 1) Татьяна Владимировна заметила, что время, которое она потратила на дорогу из дома в гимназию и на обратную дорогу с посещением магазинов, выражается в часах двумя взаимно обратными числами. Определите эти числа, если известно, что на посещение магазинов ушло 50 мин.

2) Папа Валера заметил, что количества прополотых на даче грядок сыном Игорем и дочкой Яной выражаются взаимно обратными числами. По скольку грядок прополол каждый из детей, если число прополотых ими грядок равно $\frac{17}{4}$?

П. 105. 1) Одноклассники Тима, Люба, Юля и Эдик живут в четырех соседних квартирах, номера которых — последовательные числа. Номер квартиры Тимы — самый маленький, а Эдика — самый большой. Если произведение номеров квартир мальчиков сложить с произведением номеров квартир девочек, то получится 142. Найдите номера квартир одноклассников.

2) После взвешивания дорожных сумок Кати, Оли, Маши и Наташи оказалось, что массы их сумок выражаются соответственно четырьмя последовательными натуральными числами, расположенными в порядке возрастания. Если перемножить наименьшее и наибольшее числа и из произведения вычесть сумму двух других, то получится 69. Какова масса дорожной сумки Наташи?

П. 106. 1) Федор Григорьевич и Александр Арсенович решили выяснить возраст друг друга. Александр Арсенович сказал, что в двузначном числе его возраста число десятков на 5 больше, чем число единиц в разряде единиц, а произведение цифр числа на 58 меньше самого числа. Федор Григорьевич про свой возраст сообщил те же самые данные, хотя он старше Александра Арсеновича. Сколько лет каждому из них?

2) В двузначном числе, выражающем возраст бабушки Лидии Васильевны, десятков на 3 меньше, чем содержится единиц в разряде единиц, а произведение цифр числа на 15 меньше самого числа. Найдите возраст внучки Ирины, если известно, что и число, выражающее ее возраст, имеет такие же особенности.

П. 107. 1) Сумма квадратов цифр двузначного числа серий нового бразильского телесериала на 19 меньше самого числа. Найдите число серий, если в этом числе десятков на 2 больше, чем единиц в разряде единиц.

2) Число фотографий студентки Даши, которые хранит бабушка Лидия Андреевна, двузначное. В этом числе десятков на 5 меньше, чем единиц в разряде единиц. Если к числу прибавить сумму квадратов его цифр, то получится 80. Сколько Дашиных фотографий у бабушки Лидии Андреевны?

П. 108. 1) На сколько процентов увеличится объем куба, если длину ребра увеличить на 10 %?

2) На сколько процентов уменьшится объем куба, если длину ребра уменьшить на 10 %?

П. 109 1) Спонсоры выделили деньги школе на покупку компьютеров. Цены на компьютеры снизились на 10 %. На сколько процентов больше компьютеров может купить школа на выделенные деньги?

2) На пути от станции Дадаяны до деревни Арсеново Саша увеличил скорость движения на велосипеде на 20 %. Сколько процентов времени сэкономил Саша на прохождение этого пути?

П. 110. 1) Числитель положительной дроби увеличили на 20 %. На сколько процентов надо уменьшить знаменатель, чтобы полученная дробь была в два раза больше исходной?

2) Числитель положительной дроби уменьшили на 15 %. На сколько процентов надо увеличить знаменатель, чтобы полученная дробь была вдвое меньше исходной?

П. 111. 1) В саду было 120 деревьев. Через два года в саду стало 195 деревьев. Процентное увеличение числа деревьев за второй год превзошло на 5 % увеличение за первый год. На сколько процентов увеличилось число деревьев за первый год?

2) В автобусном парке было 25 машин. Их число уменьшилось на p %, а затем увеличилось на $(p+30)$ %, после чего в парке стало 30 машин. Найдите p.

П. 112. 1) Количество учеников в классе увеличилось на столько процентов, сколько было учеников в классе. После этого в классе стало на 4 ученика больше. Сколько учеников было в классе первоначально?

2) На одной книжной полке было на 10 книг больше, чем на другой. Число книг на каждой полке увеличили на столько процентов, сколько книг было на этой полке. После этого на обеих полках стала 171 книга. Сколько книг было на обеих полках?

П. 113. 1) Степа каждый месяц на одну и ту же сумму покупает несколько одинаковых дискет для работы на компьютере. В марте он увеличил сумму на приобретение дискет на 20 %. На сколько процентов должна быть ниже цена одной дискеты, чтобы на эту сумму Степе удалось купить в два раза больше дискет, чем раньше?

2) Дренажные трубки* заменили на другие, сечение которых на 20 % меньше. На сколько процентов надо увеличить количество трубок, чтобы пропускная способность системы увеличилась в 2 раза?

П. 114. 1) Введение новой железнодорожной ветки уменьшило путь между станциями Суворово и Таранки на 12 % и позволило увеличить скорость движения поездов на 10 %. Сколько процентов составила экономия времени на этом участке пути?

2) Введение в эксплуатацию моста через реку Амелька сократило путь между селами Иваничи и Федосово на 22 %, а ремонт покрытия дороги позволил увеличить

* **Дренаж** — система канав и подземных труб для сбора и отвода грунтовых вод с целью осушения почвы или понижения их уровня под основаниями сооружений.

скорость движения автомобилей на 7 %. Сколько процентов составила экономия времени при движении автомобиля между селами Иваничи и Федосово?

П. 115. 1) После снижения цены на очистительные фильтры для воды число покупателей увеличилось на 10 %, а после улучшения качества фильтрующего элемента — еще на 20 %. Реклама фильтров для воды увеличила число покупателей еще на 25 %. На сколько процентов увеличилось число покупателей фильтров благодаря предпринятым мерам?

2) Новое покрытие дорожки для разбега позволило спортсмену Игорю увеличить дальность прыжка на 5 %, смена обуви позволила увеличить дальность прыжка еще на 4 %. Но из-за травмы Игорь уменьшил число прыжков на тренировке на 10 %. На сколько процентов и как изменилась дальность всех прыжков, выполненных в течение одной тренировки?

П. 116. Таня и Катя, одновременно выйдя из своих домов, отправились друг к другу в гости. Через 6 мин они прошли мимо друг друга по разным сторонам улицы. Сколько времени потратила на весь путь Катя, если Таня через 4 мин после «встречи» была около дома Кати?

2) Мотоциклист Федор преодолевает расстояние между деревней Проньки и поселком Рубежное за 3 ч, а мотоциклист Тимофей — за 2 ч. Федор и Тимофей выехали одновременно навстречу друг другу. За какое время после встречи каждый из них приедет в пункт назначения?

П. 117. 1) Кружковцы Коля и Вадим, работая вместе, могут набрать на компьютере текст и сделать чертежи их общего научного реферата по алгебре на 3 ч быстрее, чем один Коля, и на 27 ч быстрее, чем Вадим. За какое время каждый из мальчиков один мог бы подготовить материалы к реферату на компьютере?

2) Лиза может выполнить все рисунки для издательства к рукописи учебника на 21 ч быстрее Лены, но на 4 ч дольше, чем работая вместе с Леной. За какое время могут подготовить все рисунки Лиза и Лена, работая по отдельности?

П. 118. 1) Паша и Гена, работая вместе, могут выполнить все столярные работы при ремонте дома за 12 дней. Если бы Паша тратил на эту работу на 8 дней меньше, чем обычно, а Гена — на 9 дней больше, чем обычно, то и в этом случае, работая вместе, они справились бы с заданием за 12 дней. За сколько дней, работая в обычном темпе, может выполнить все столярные работы каждый из мастеров?

2) Наборщицы Галя и Лена, работая в обычном темпе, могут набрать главу рукописи за 20 ч. Если бы Лена смогла одна набрать такое количество страниц на 22 ч быстрее, а Галя — на 10 ч быстрее, то, работая вместе, они вдвое сократили бы время на набор этой главы. За сколько часов может набрать главу каждая из наборщиц в отдельности?

П. 119. 1) Ко дну химического сосуда прикреплены две отводящие трубки с зажимами. Если со второй трубки снять зажим спустя 16 мин после того как сняли зажим с первой трубки, то весь раствор вытечет из сосуда за 21 мин после освобождения первой трубки. Если же с первой трубки снять зажим спустя 8 мин после снятия зажима со второй трубки, то весь раствор вытечет из сосуда за 20 мин после снятия зажима со второй трубки. За сколько минут вытечет раствор, если обе трубки освободить от зажимов одновременно?

2) В дне большого аквариума имеются два отверстия для спуска воды. Если второе отверстие открыть через 6 мин после того, как открыли первое, то вся вода из аквариума вытечет через 6 мин после открытия второго отверстия. Если открыть второе отверстие спустя 9 мин после открытия первого, то вся вода вытечет через 4 мин после открытия второго отверстия. За сколько времени вытечет вся вода из аквариума, если оба отверстия открыть одновременно?

П. 120. 1) Между поселками Бурыгино и Стулово курсируют два автобуса. Оба автобуса выехали из поселков одновременно и встретились через 1,5 ч после выезда. Если после встречи автобус, выехавший из Стулово, увеличит скорость на 25 км/ч, а автобус, выехавший из Бурыгино, увеличит скорость на 15 км/ч, то автобусы

придут в пункты назначения одновременно. Найдите скорости, с которыми выезжали автобусы, если расстояние между поселками 120 км.

2) Со станцией Грицкевичи и Надежино, расстояние между которыми 190 км, одновременно выехали навстречу друг другу Вася на автомобиле и Валера на мотоцикле и встретились через 2 ч. После встречи Валера увеличил скорость на 5 км/ч, а Вася — на 10 км/ч. Вася прибыл в Надежино на полчаса раньше, чем Валера в Грицкевичи. Найдите первоначальные скорости движения мотоцикла и автомобиля.

П. 121. 1) Расстояние между поселками Седичи и Отрадное по реке равно 66 км. Два катера одновременно отправляются из этих поселков навстречу друг другу и встречаются через 1,5 ч. Разность собственных скоростей катеров равна 12 км/ч. Катер с меньшей собственной скоростью плыл по течению и прибыл в пункт назначения через 33 мин после встречи катеров. Найдите собственные скорости катеров и скорость течения реки.

2) Расстояние между поселками Шахновичи и Дашкевичи по реке равно 63 км. Навстречу друг другу из этих поселков отошли два катера, разность собственных скоростей которых равна 5 км/ч. Один из них пройдет путь до Дашкевичей за 2 ч 15 мин, а другой — до Шахновичей за 2 ч 20 мин. Найдите собственные скорости катеров и скорость течения реки, которая больше 2,5 км/ч.

П. 122. 1) От станции Филимоново к станции Витьки с интервалом в 3 ч вышли пассажирский и скорый поезда. Скорый поезд догнал пассажирский, пройдя 560 км, и через 2 ч после обгона прибыл в Витьки, а пассажирскому поезду в момент прибытия скорого оставалось ехать еще 48 км. Найдите скорости движения поездов и расстояние от Филимоново до Витьков.

2) Нина вышла из деревни Кондратьево в поселок Нелино. Когда она прошла 1 км, вслед за ней вышел Слава, который догнал Нину за 1 ч в 3 км от Нелино. Слава пришел в Нелино на 6 мин раньше Нины. Найдите

скорости пешеходов и расстояние, которое они прошли.

П. 123. 1) Один из автомобилей проходит 5 км на 1 мин быстрее, чем другой проходит 6 км. Найдите скорости автомобилей, если один из них преодолевает 450 км на 15 мин быстрее другого.

2) Один из велосипедистов проезжает 450 м на 39 с дольше, чем другой проезжает 400 м. Найдите скорости велосипедистов, если второй проезжает 10 км на 10 мин быстрее первого.

П. 124. 1) Из Минска в Москву, расстояние между которыми 720 км, выехал автобус, а через 2 ч по тому же маршруту выехал легковой автомобиль, скорость которого на 24 км/ч больше скорости автобуса. Автомобиль прибыл в Москву через 6 ч после того, как догнал автобус. Найдите скорости автобуса и автомобиля.

2) От деревни Подошевки до станции Скубенково 50 км. Из деревни Подошевки на станцию Скубенково выехал велосипедист Саша со скоростью 14 км/ч, а спустя некоторое время вслед за ним по тому же маршруту выехал мотоциклист Валера со скоростью 50 км/ч и приехал на станцию Скубенково через 25 мин после того, как догнал Сашу. На сколько позже Саши выехал Валера?

П. 125. 1) Если из деревни Бадытчики, расположенной около шоссе, выедут одновременно два автомобиля, то в случае их выезда в разных направлениях через 2 ч расстояние между ними будет на 240 км больше, чем было бы, если бы они поехали в одном направлении. Найдите скорости автомобилей, если скорость одного из них на $33\frac{1}{3}$ % больше скорости другого.

2) Из пунктов A и B, расположенных на прямолинейном участке шоссе, одновременно выезжают два автомобиля. Если они поедут в направлении от A к B, то через 2 ч расстояние между ними будет на 96 км больше, чем было бы в случае их движения от B к A. Найдите скорости автомобилей, если скорость одного на 40 % больше скорости другого.

П. 126. 1) Расстояние между станциями Губино и Касперки по железной дороге 90 км, а по грунтовой дороге — 125 км. Со станции Губино поезд выходит на 1 ч позже рейсового автобуса и прибывает в Касперки на 30 мин раньше его. Найдите среднюю скорость поезда, если известно, что она на 40 км/ч больше средней скорости автобуса.

2) Расстояние между деревнями Казаково и Смоляки 52 км по насыпной дороге и 64 км по реке. Автобус из деревни Казаково вышел на 4 ч позже, чем оттуда отправился на лодке рыбинспектор. Найдите среднюю скорость движения лодки по реке, если известно, что средняя скорость автобуса на 40 км/ч больше и он прибыл в Смоляки на 20 мин раньше лодки.

П. 127. 1) От станции Алейники до поселка Шустиково 10 % пути идет по заболоченной местности, 87 км — лесом, а остальная часть дороги проходит через пахотные земли и относится к длине пути по заболоченным местам как 7 : 4. Какое расстояние от Алейников до Шустиково?

2) На пути от станции Волково до поселка Анищево 10 % железнодорожного полотна проложено вдоль озера. 209 км — через лес, а остальная часть дороги, проходящая через поля, относится к длине пути вдоль озера как 7 : 2. Какое расстояние между Волково и Анищево?

П. 128. 1) Лодка плывет с постоянной скоростью 8 км/ч от деревни Гончаренки до деревни Доморады по озеру, а от Доморад до деревни Сырица — по реке и затем отправляется обратно.

От Гончаренок до Сырицы лодка идет 7 ч 30 мин, а обратно — на 2 ч меньше, причем на путь от Доморад до Сырицы времени уходит вдвое больше, чем на путь от Доморад до Гончаренок. Найдите расстояние между деревнями Гончаренки и Сырица.

2) Лодка идет от пристани 5 км по озеру, а затем по реке до деревни Якуново и сразу же возвращается обратно. Известно, что в оба конца лодка прошла 40 км и при этом на обратный путь потратила на 1 ч меньше.

Найдите скорость течения реки, если известно, что средняя скорость движения лодки по озеру 8 км/ч.

П. 129. 1) Из деревни Волма в поселок Солнечный, расстояние между которыми 120 км, одновременно выехали на мотоциклах Витя и Саша. Когда Витя проехал 70 км, Саше осталось проехать 36 км. Сколько километров останется проехать одному из мотоциклистов, когда другой приедет в поселок?

2) Из города Минска в деревню Рудня одновременно выехали на автомобилях Егор и Миша. Когда Егор проехал 25 км, Мише осталось проехать 80 км, а когда Егор проехал 75 км, Мише осталось проехать 40 км. Какое расстояние от Минска до Рудни?

П. 130*. 1) Студенты Вася и Костя, отдыхающие в двух спортивных лагерях, договорились выйти одновременно навстречу друг другу и встретиться на тропинке, соединяющей два лагеря. Если Вася выйдет на 1 ч раньше, то встреча произойдет на 36 мин раньше, чем намечалось. Найдите скорости Васи и Кости, если скорость Васи на 2,5 км/ч больше скорости Кости.

2) Друзья Паша и Сережа, выехав на велосипедах навстречу друг другу в одно и то же время, встретились на станции. Если бы один из мальчиков выехал на 1 ч раньше, то встреча произошла бы в 7,2 км от станции. Найдите скорости мальчиков, если они отличаются на 6 км/ч.

П. 131. 1) Из Глубокого в Плещеницы, расстояние между которыми 100 км, велосипедист Игорь выехал на час раньше Валеры, который ехал на автомобиле. Когда Валера приехал в Плещеницы, Игорю осталось ехать до Плещениц 44 км. После 20-минутной стоянки в Плещеницах Валера выехал в Глубокое, и, когда он приехал, Игорю осталось проехать до Плещениц 4 км. Найдите скорости велосипедиста Игоря и автомобиля.

2) Из деревни Бобково в поселок Мазаники, расстояние между которыми 24 км, вышел турист Володя, а спустя 2 ч выехал на велосипеде Сергей. Когда Сергей приехал в Мазаники, Володя прошел 20 км. После 30-минутного отдыха Сергей поехал в Бобково и приехал через 1 ч 10 мин после того, как Володя пришел в Мазаники. Найдите скорости движения Володи и Сергея.

6. Арифметическая и геометрическая прогрессии

П. 132. Сумма третьего и девятого членов арифметической прогрессии равна 8. Найдите сумму первых 11 членов этой прогрессии.

П. 133. Первый и четвертый члены арифметической прогрессии соответственно равны 1,2 и 1,8. Найдите сумму первых десяти ее членов.

П. 134. Найдите сумму всех четных двузначных положительных чисел.

П. 135. Найдите значение выражения

$$7{,}5 + 9{,}8 + 12{,}1 + \ldots + 53{,}5.$$

П. 136. Сумма трех чисел, образующих арифметическую прогрессию, равна 111. Второе число больше первого в пять раз. Найдите первое число.

П. 137. Первый член арифметической прогрессии равен 5, а разность этой прогрессии равна 4. Является ли число 100 091 членом этой прогрессии?

П. 138. В арифметической прогрессии шестой член равен 11. Найдите сумму пятого, шестого и седьмого членов этой прогрессии.

П. 139. При каких значениях a значения выражений $\frac{2}{a}$, $\frac{1}{a(1-a)}$, $\frac{2}{1-a}$ являются последовательными членами арифметической прогрессии?

П. 140. В арифметической прогрессии $a_2 + a_4 + a_6 = 18$; $a_2 \cdot a_4 \cdot a_6 = -168$. Найдите первый член и разность прогрессии.

П. 141. В арифметической прогрессии сумма третьего и девятого членов равна 6, а их произведение равно $\frac{135}{16}$. Найдите сумму первых пятнадцати членов прогрессии.

П. 142. В геометрической прогрессии первый член равен 3, второй член равен 12, n-й член равен 3072. Найдите n.

П. 143. В геометрической прогрессии разность первого и второго членов равна 35, а разность третьего и четвертого членов равна 560. Найдите первые четыре члена этой прогрессии.

П. 144. Знаменатель геометрической прогрессии равен -2, сумма ее первых пяти членов равна 5,5. Найдите девятый член этой прогрессии.

П. 145. Первый член геометрической прогрессии равен 150, четвертый член равен 1,2. Найдите пятый член прогрессии.

П. 146. В геометрической прогрессии четвертый член равен 16, знаменатель равен $\sqrt{2}$. Найдите первый член этой прогрессии.

П. 147. Найдите первый член и знаменатель геометрической прогрессии, у которой сумма первого и третьего членов равна 40, а сумма второго и четвертого членов равна 80.

П. 148. Знаменатель геометрической прогрессии равен 2, сумма первого и последнего членов равна 68, произведение второго и предпоследнего членов равно 256. Сколько членов в прогрессии?

П. 149. В геометрической прогрессии первый член равен 1, а сумма первых пяти членов в 16 раз превосходит сумму обратных величин этих же членов. Найдите знаменатель прогрессии.

П. 150. Частное от деления четвертого члена геометрической прогрессии на ее первый член равно 64, третий член прогрессии равен 8. Найдите первый член прогрессии.

П. 151. Найдите три последовательных члена геометрической прогрессии, зная, что их сумма равна 62, а сумма их квадратов равна 2604.

П. 152. Задайте формулой n-го члена арифметическую прогрессию, если известно, что сумма первых десяти членов равна 300, а первый, второй и пятый члены прогрессии являются последовательными членами геометрической прогрессии.

П. 153. Все члены геометрической прогрессии различны. Если удалить второй и третий члены, то первый, четвертый и пятый члены будут последовательными членами геометрической прогрессии. Найдите ее знаменатель.

П. 154. Три положительных числа, сумма которых равна 12, составляют арифметическую прогрессию. Если к ним соответственно прибавить 1, 2, 6, то полученные числа составят геометрическую прогрессию. Найдите эти числа.

П. 155. Найдите третий член убывающей геометрической прогрессии, сумма которой равна 1,6, а второй член равен $-2{,}625$.

П. 156*. Найдите отношение третьего члена убывающей геометрической прогрессии к ее пятнадцатому члену, если сумма двенадцати членов этой прогрессии, начиная с тринадцатого, составляет 40 % суммы ее первых двенадцати членов.

П. 157. 1) Бактерия делится пополам в течение суток. Пробирка окажется полной на 10-е сутки после помещения в нее одной бактерии. На какие сутки наполнится пробирка, если в нее поместить две бактерии?
2) Пруд полностью зарос ряской за 30 дней. На какой день ряской была покрыта половина пруда, если ежедневно площадь поверхности, покрываемой ряской, удваивалась?

П. 158. Найдите значение выражения

$$32-\frac{96}{5}+\frac{288}{25}-\frac{864}{125}+\ldots.$$

П. 159*. Решите уравнение ($x \in N$)

$$(3+6+9+\ldots+3(x-1))+\left(4+5{,}5+7+\ldots+\frac{8+3x}{2}\right)=$$
$$=137.$$

П. 160. Решите уравнение ($x \in N$)

$$\frac{x-1}{x}+\frac{x-2}{x}+\ldots+\frac{1}{x}=3.$$

П. 161. На куб с ребром a поставили куб с ребром $\frac{a}{2}$, на него — куб с ребром $\frac{a}{4}$, на него — куб с ребром $\frac{a}{8}$ и т. д. Найдите высоту получившейся фигуры.

П. 162. Представьте бесконечную периодическую десятичную дробь в виде обыкновенной дроби:
1) 0,3131...; 2) 0,6666...; 3) 0,2444...; 4) 5,0413413... .

ОТВЕТЫ

Глава 1

1.1. 1) $(-\infty; 1{,}5)$; 3) $\left(\frac{15}{46}; +\infty\right)$; 5) $(-1; +\infty)$; 7) $(-\infty; 0{,}5]$.

1.2. 2) $(-18; 6)$; 4) $(-\infty; -15) \cup (5; +\infty)$; 6) $(-\infty; -8{,}4] \cup [12; +\infty)$; 8) $(-19{,}6; 3{,}6)$; 10) $(-\infty; -126) \cup (42; +\infty)$.

1.3. 1) $(-\infty; 7] \cup [9; +\infty)$; 3) $(-2; 1{,}5)$; 5) R; 7) $x \neq 3\frac{3}{7}$.

1.4. 2) Да; 4) нет.

1.5. 1) R; 3) $\varnothing$; 5) $\varnothing$; 7) $\varnothing$.

1.7. 2) $\varnothing$; 4) R; 6) $x \neq 8$; 8) $x = 8$; 10) $x = -4$.

1.8. 2) $\varnothing$; 4) R; 6) R; 8) $\varnothing$.

1.9. 1) $(-\infty; -7] \cup [7; +\infty)$; 3) $(-12; 12)$; 5) $[-\sqrt{7}; \sqrt{7}]$.

1.10. 2) $[-2; 2]$; 4) $(-\infty; -6] \cup [6; +\infty)$; 6) $(-\sqrt{13}; \sqrt{13})$.

1.12. 1) Нет; 3) нет.

1.13. 2) 0; 4) −2; 6) 7.

1.14. 1) Если $p \leqslant 0$, то решений нет; если $p > 0$, то $x \in (-\sqrt{p}; \sqrt{p})$; 3) если $p = 0$, то $x = 0$; если $p \neq 0$, то решений нет.

1.15. 2) $\varnothing$; 4) $[-p; +\infty)$; 6) если $p \geqslant 0$, то $x \in (-6; +\infty)$; если $p < 6$, то $x \in (-6; -p) \cup (-p; +\infty)$.

1.17. 1) R; 3) R; 5) $\varnothing$; 7) $\varnothing$.

1.18. 2) R; 4) $\varnothing$; 6) $\varnothing$; 8) R; 10) R.

1.19. 1) R; 3) R.

1.20. 2) $\varnothing$; 4) $\varnothing$; 6) $\varnothing$; 8) $\varnothing$.

1.23. 1) а) $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$; б) минус; в) R; г) $\varnothing$; 3) а) $a > 0$, $b = 0$, $c > 0$; б) минус; в) R; г) $\varnothing$.

1.24. 2) $(-\infty; -6)$; 4) $[1{,}2; +\infty)$.

1.27. 1) $x \neq 4$; 3) $\varnothing$; 5) $x \neq 3$; 7) $x \neq 0{,}5$; 9) R.

1.28. 2) $x \neq -5$; 4) $x \neq -1{,}5$; 6) $x \neq 0{,}5$; 8) 0,75.

1.29. 1) 5; 3) R.

1.30. 2) а) Ни при каких; б) $x \neq p$; в) $x = p$; г) R; д) $x = p$; е) $x \neq p$; 4) а) $x \neq 0$; б) ни при каких; в) R; г) $x = 0$; д) $x = 0$; е) $x \neq 0$.

1.31. 1) $(3; +\infty)$; 3) $(-0{,}25; 1) \cup (1; +\infty)$; 5) $(-50; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; +\infty)$.

1.32. 2) Ни при каких; 4) $p \leqslant 0$; 6) $p \geqslant 0$.

1.33. 1) а) $(-3; 1)$; б) $(-\infty; -3] \cup [1; +\infty)$.

1.34. 1) $(-3; 1)$; 3) $(-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$; 5) $(-\infty; -1] \cup \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$; 7) $[-0{,}5; 2]$; 9) $(-2; 1)$.

1.35. 2) $(0{,}8; 1)$; 4) $(1; 2)$; 6) $[0{,}5; 4]$.

1.36. 1) $(-\infty; -5] \cup [5; +\infty)$; 3) $(-\infty; -3{,}5) \cup (3{,}5; +\infty)$; 5) $[-\sqrt{10}; \sqrt{10}]$; 7) $(-\infty; -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}; +\infty)$.

1.37. 2) $(-\infty; -3\sqrt{2}] \cup [3\sqrt{2}; +\infty)$; 4) $(-\sqrt{23}; \sqrt{23})$; 6) $(-\sqrt{95}; \sqrt{95})$.

1.38. 1) $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$; 3) $(0; 0{,}5)$; 5) $[0; 4]$; 7) $(2; +\infty)$; 9) $\{0\} \cup [9; +\infty)$.

1.39. 2) $(-\infty; -0{,}4] \cup [1; +\infty)$; 4) $(-\infty; -2{,}6) \cup (5; +\infty)$; 6) $(-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$.

1.40. 1) $(0; 4{,}2)$; 3) $(-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$.

1.41. 2) $(-\infty; 2) \cup (5; +\infty)$; 4) $(-3; 8)$; 6) $[-4; 0]$.

1.42. 1) $(1; 2)$; 3) $(-\infty; -1] \cup \{0\} \cup \left[1\frac{1}{3}; +\infty\right)$; 5) $(2; 3)$.

1.43. 2) $(-7; -5)$; 4) $(1; 7)$; 6) $\left[-\frac{2}{3}; 3\right]$.

1.44. 1) $(1; 1{,}2)$; 3) $(-\infty; -4{,}5] \cup [2; +\infty)$.

1.45. 2) $(-\infty; -0{,}5)$, $(-0{,}5; 3)$, $(3; +\infty)$; 4) $(-\infty; -5)$, $\left(-5; 1\frac{1}{3}\right)$, $\left(1\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

1.46. 1) $(-\infty; 0{,}2] \cup [1; +\infty)$; 3) $(-\infty; -2) \cup (0{,}5; -\infty)$.

1.47. 2) а) $(m; n)$; б) $(-\infty; m) \cup (n; +\infty)$; в) $(-\infty; m] \cup [n; +\infty)$; г) $[m; n]$; 4) а) $\varnothing$; б) R; в) R; г) $\varnothing$; 6) а) $x \neq q$; б) $\varnothing$; в) $x = q$; г) R.

1.48. 1) $(-\infty; -5) \cup (2; +\infty)$; 3) $(-\infty; -4{,}5) \cup (4; +\infty)$.

1.49. 2) $(1; 2)$; 4) $[5; +\infty)$.

1.50. 1) $(-\infty; -0{,}8) \cup (2; +\infty)$.

1.51. 2) $(-4; 5)$; 4) $(-\infty; 2) \cup (6; +\infty)$; 6) $[5; 8{,}5]$; 8) $(-\infty; 3{,}6] \cup [12{,}3; +\infty)$.

1.52. 1) $(-\infty; -3) \cup (4; 1{,}5)$; 3) $(-\infty; 0) \cup (1; 2) \cup (5; +\infty)$; 5) $(-\infty; -1{,}2] \cup [0{,}5; 3{,}6]$; 7) $[-7{,}1; 9{,}9] \cup [11{,}5; +\infty)$.

1.53. 2) $(0{,}8; 4)$; 4) $\left(-\infty; -\frac{5}{8}\right) \cup \left(\frac{7}{9}; +\infty\right)$; 6) $(-\infty; 2] \cup [8; +\infty)$; 8) $[-6; -1]$; 10) $[2{,}6; 2{,}7]$.

1.54. 1) $(-\infty; -1] \cup \left[1\frac{2}{3}; +\infty\right)$; 3) $\left[-\frac{5}{6}; 12\right]$; 5) $(-\infty; -4) \cup (-0{,}5; 3)$; 7) $(-\infty; -7] \cup [-1{,}7; 0]$.

1.55. 2) $[-0{,}5; 0{,}4]$; 4) $(-\infty; 0] \cup [0{,}5; 9]$; 6) $(-\infty; -3) \cup (-1; 0) \cup (5; +\infty)$.

1.56. 1) $\{3\} \cup [5; +\infty)$; 3) $\left[-2; \frac{1}{3}\right] \cup [2; 7]$.

1.57. 2) $[-1 - \sqrt{2}; 0)$.

1.58. 1) $[-0{,}25; 1{,}5]$.

1.59. 2) $(-\infty; -0{,}5) \cup (1{,}5; +\infty)$; 4) $(-2; 0)$; 6) $(-\sqrt{5}; \sqrt{5})$; 8) $(0{,}5; 0{,}6)$.

1.60. 1) $(-\infty; -8] \cup [0; +\infty)$; 3) $(0; 12)$; 5) $(-\infty; -4] \cup [0; 3]$; 7) $(-0{,}5; 0) \cup (1{,}5; +\infty)$; 9) $[-3; 0] \cup [5; +\infty)$.

1.61. 2) $(0; 0{,}5) \cup \left(1\frac{2}{3}; +\infty\right)$; 4) $(-4{,}5; 0) \cup (2; +\infty)$; 6) $(0; 1)$; 8) $(-\infty; 0]$; 10) $(-\infty; \sqrt{7}) \cup (0; \sqrt{7})$.

1.62. 1) $(1; +\infty)$; 3) $\{-9\} \cup [-5; 7]$.

1.63. 2) $(-2; 3)$; 4) $(0; 1) \cup (1; 12)$; 6) $(-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$; 8) $[-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}]$.

1.64. 1) $[-8{,}2; -2] \cup [2; -\infty)$; 3) $(0; 1{,}9)$; 5) $(-0{,}8; 0{,}8)$; 7) $(-\sqrt{13}; \sqrt{13}) \cup \{8\}$; 9) $[-5; -\infty)$.

1.65. 2) $(2; 4) \cup \{0{,}25\}$; 4) $[-1; -0{,}2] \cup \{0; 3\}$; 6) $(-3; 2) \cup (2; 4)$; 8) $(-\infty; -5] \cup [-4; 0] \cup [4; 5]$.

1.66. 1) а) $(-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 5)$; б) $(5; +\infty)$; в) $(-\infty; 5]$; г) $\{0; 1\} \cup [5; +\infty)$; д) $\{0; 1; 5\}$; е) $(-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 5) \cup (5; +\infty)$.

1.67. 2) $\left(-3; \frac{1}{3}\right)$; 4) $(-\infty; 1) \cup (2{,}5; +\infty)$.

1.68. 1) $(-\infty; 1) \cup (9; +\infty)$.
1.69. 2) $(-\infty; -2) \cup (1; 3)$; 4) $[5; 6] \cup [7; +\infty)$.
1.70. 1) $(-5; 1)$; 3) $[-0,75; 1]$.
1.71. 2) $(-\infty; -3] \cup [-2; 2] \cup [3; +\infty)$; 4) $(-\infty; -5) \cup (5; +\infty)$.
1.72. 1) $[-2; 2] \cup \{-5; 5\}$; 3) $(-\infty; 3) \cup (4; +\infty)$; 5) $(-\infty; -5] \cup [5; +\infty)$.
1.73. 2) $(-\infty; 8) \cup (12; +\infty)$; 4) $(-17; -10) \cup (-10; -3)$.
1.74. 1) $(-\infty; 4] \cup [6; +\infty)$; 3) $(-7; -3)$; 5) $[-1; 2]$.
1.75. 2) $(-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$; 4) $(-\infty; -8,6) \cup [0; +\infty)$; 6) $(3,6; 4,9)$; 8) $(0,9; 4]$; 10) $(-2; 5)$.
1.76. 1) $(-\infty; -4) \cup (2; +\infty)$; 3) $(6; 11)$.
1.77. 2) $(0; 8)$; 4) $(-\infty; -2) \cup (7; +\infty)$.
1.78. 1) $(-\infty; -11) \cup (-8; 4) \cup (12; +\infty)$; 3) $(-14; -5) \cup (1; 7)$; 5) $(-\infty; -4] \cup \cup (13; 19) \cup [21; +\infty)$; 7) $(-18; -16] \cup [-10; 7)$.
1.79. 2) $(-\infty; -3) \cup (5; 6) \cup (9; +\infty)$; 4) $(-\infty; -5) \cup [-3,2; 2) \cup [2,3; +\infty)$; 6) $\left(-\infty; -2\frac{1}{3}\right] \cup (-1; 4) \cup [2,5; +\infty)$; 8) $\left(-1\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right) \cup (3; 5)$.
1.80. 1) $(1; 3] \cup [4; +\infty)$; 3) $(-5; -3) \cup (1; 2)$; 5) $\left(-3; \frac{1}{3}\right) \cup \left[2\frac{1}{2}; +\infty\right)$.
1.81. 2) R; 4) $\varnothing$; 6) $x \neq -0,5$.
1.82. 1) $(-\infty; -3) \cup (1; 3)$; 3) $(-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$; 5) $(-\infty; -7) \cup (-4; 4)$; 7) $(-\infty; -7] \cup [2; +\infty)$.
1.83. 2) $(-\infty; -8) \cup (-4; 3) \cup (3; 4)$; 4) $(-\infty; -6) \cup (-2; 2) \cup \{12\}$; 6) $(0; 2) \cup \cup (8; +\infty)$; 8) $(-\infty; -5) \cup (-3; 3) \cup (5; +\infty)$.
1.84. 1) $(0; 1]$; 3) $(-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$; 5) $(-\infty; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; +\infty)$; 7) $\left(-\infty; -5\frac{1}{3}\right) \cup \left(-2\frac{1}{2}; +\infty\right)$; 9) $[-\sqrt{7}; -2) \cup \left[\sqrt{7}; 2\frac{2}{3}\right)$.
1.85. 1) $(-\infty; -1) \cup (0; 0,5) \cup (1; +\infty)$; 3) $\left(3; 31\frac{1}{3}\right)$.
1.86. 2) $(-2; +\infty)$; 4) $(-\infty; -2) \cup (0,25; +\infty)$; 6) $(-\infty; -4] \cup [-0,75; 7]$; 8) $(-\infty; -0,5) \cup [1; 2) \cup [3; +\infty)$.
1.87. 1) $[-8; 0) \cup [8; +\infty)$; 3) $\left(0; 1\frac{7}{8}\right] \cup (3; +\infty)$; 5) $(-\infty; -4] \cup (-2; 0] \cup \cup (1; +\infty)$.
1.88. 2) $(-8; 0)$; 4) $(0,5; 3)$.
1.89. 1) $(-\infty; -3) \cup (-0,5; 2) \cup (3; +\infty)$; 3) $[-5; -1) \cup [5; 7)$; 5) $(-\infty; -4) \cup \cup (4; 7)$.
1.90. 2) $(-\infty; 0,5] \cup [2; +\infty)$; 4) $\varnothing$.
1.91. 1) $\left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$; 3) $(2; 2,5)$.
1.92. 2) $(-1; 3)$; 4) $-0,5$.
1.93. 1) Да.
1.94. 2) $(0; +\infty)$; 4) $[-6; 2)$; 6) $\varnothing$; 8) $[2; 9]$.
1.96. 1) Например, $\begin{cases} x + 3 > 0, \\ 2x - 1 \leqslant 0. \end{cases}$

1.97. 2) Например, $\begin{cases} -3x + 17 \geqslant 2, \\ 7x - 28 \leqslant 0. \end{cases}$
1.98. 1) $(-\infty; -0,8)$; 3) $\varnothing$; 5) $\varnothing$.
1.99. 2) $(-7; -3,5]$; 4) $\varnothing$; 6) $[-2; 2]$.
1.100. 1) 11; 3) 1, 2, 3, 4, 5, 6.
1.101. 2) $(-\infty; -2)$; 4) $(-\infty; -2)$; 6) $[3; +\infty)$.
1.102. 1) $(-2; 4]$; 3) $[0,4; 4]$; 5) $[-4; 4]$.
1.103. 2) $(-\infty; -2)$; 4) $(5; +\infty)$; 6) $(-\infty; -7]$.
1.104. 1) $\varnothing$; 3) $\varnothing$; 5) $\varnothing$.
1.105. 2) $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup (1; 2,5]$; 4) $(1; +\infty)$; 6) $(12; +\infty)$.
1.106. 1) $[0; 3) \cup (5; +\infty)$; 3) $[3; 5]$; 5) $[4; 5)$.
1.107. 2) $(-\infty; 0,5)$; 4) $(-\infty; 1]$; 6) $(-\infty; 12)$.
1.108. 1) $\varnothing$; 3) $\varnothing$; 5) $\varnothing$.
1.109. 2) $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right]$; 4) $[-1; -0,25) \cup (2; +\infty)$.
1.110. 1) 3.
1.111. 2) $(0; 3]$; 4) $(3; 8)$.
1.112. 1) $(1; 2]$; 3) $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup [2; +\infty)$.
1.113. 2) 9.
1.114. 1) $[2; 3]$; 3) $(-\infty; -\sqrt{2}] \cup (5; +\infty)$; 5) $\varnothing$.
1.115. 2) $[-\infty; 1 - \sqrt{8}] \cup [1 + \sqrt{8}; 4]$; 4) $(-\infty; -3] \cup \left[-\frac{1}{3}; 2\right] \cup [5; +\infty)$.
1.116. 1) $[5; +\infty)$; 3) 3.
1.117. 2) $(-5; -3] \cup [9; 11]$; 4) $(2,5; +\infty)$.
1.118. 1) $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$.
1.119. 2) $\varnothing$.
1.120. 1) $a \geqslant 2$.
1.121. 2) $b > 8$.
1.122. 1) $c \leqslant 3$.
1.123. 2) $1 < p \leqslant 2$.
1.124. 1) 8; 9.
1.125. 2) $\frac{3}{10}$.
1.126. 1) Если $3 < a < 7$, то $x \in \left(-\infty; \frac{1}{a-3}\right)$; если $a = 3$, то x — любое; если $a = 7$, то решений нет; если $a < 3$ или $a > 7$, то $x \in \left(\frac{1}{a-3}; +\infty\right)$; 3) если $a < -2,5$ или $a > 2$, то $x \in \left(-\infty; \frac{1}{2a+5}\right]$; если $a = -2,5$, то решений нет; если $a = 2$, то x — любое; если $-2,5 < a < 2$, то $x \in \left[\frac{1}{2a+5}; +\infty\right)$; 5) если $a < 7$, то $x \in (2a - 1; +\infty)$; если $a = 7$, то решений нет; если $a > 7$,

то $x \in (-\infty;\ 2a-1)$; 7) если $a < -1$ или $a > 7$, то $x \in \left(-\infty;\ \frac{1}{7-a}\right]$; если $a = -1$, то x — любое; если $a = 7$, то решений нет; если $-1 < a < 7$, то $x \in \left[\frac{1}{7-a};\ +\infty\right)$.

1.127. 2) Если $k < 0$, то решений нет; если $k = 0$, то $x = 0$; если $k > 0$, то $x \in [-\sqrt{k};\ \sqrt{k}]$; 4) $k \leqslant 0$, то решений нет; если $k > 0$, то $x \in (-\sqrt{k};\ \sqrt{k})$.

1.128. 1) Если $k < -2$ или $k > 2$, то $x \in (-\infty;\ -\sqrt{k^2-4}) \cup (\sqrt{k^2-4};\ +\infty)$; если $k = \pm 2$, то $x \neq 0$; если $-2 < k < 2$, то x — любое; 3) если $k < -4$, или $k > 4$, то $x \in [-\sqrt{k^2-16};\ \sqrt{k^2-16}]$; если $k = \pm 4$, то $x = 0$; если $-4 < k < 4$, то решений нет.

1.129. 2) Если $k = -7$, то $x = 0$; если $k \neq -7$, то $x \in [-|k+7|;\ |k+7|]$; 4) если $k = 9$, то $x \neq 0$; если $k \neq 9$, то $x \in (-\infty;\ -|k-9|) \cup (|k-9|;\ +\infty)$.

1.130. 1) $0 \leqslant a < 4$.

1.131. 2) Если $a < -2$, то $x \in (-\infty;\ a) \cup [-2;\ 3]$; если $a = -2$, то $x \in [3;\ +\infty)$; если $-2 < a < 3$, то $x \in (-\infty;\ -2] \cup (a;\ 3]$; если $a = 3$, то $x \in [-2;\ 3) \cup (3;\ +\infty)$; если $a > 3$, то $x \in (-\infty;\ -2] \cup [3;\ a)$.

1.132. 1) -30.

1.133. 1) При любых; 2) ни при каких.

1.134. 1) При любых; 2) $[-0{,}5;\ 0{,}6]$.

Глава 2

2.1. 1) -24; 3) 152.

2.2. 2) Больше; 4) меньше; 6) меньше; 8) меньше.

2.3. 1) 6^8; 3) $(-5)^{21}$; 5) 2^{10n+4}.

2.4. 2) a^{10}; 4) m^{22}; 6) $(6t)^{14}$.

2.5. 1) Например, $2^3 \cdot 2^{13}$; 3) например, $a^2 \cdot a^3$; 5) например, $4^2 \cdot 4^{b+1}$; 7) например, $13^a \cdot 13^{2a}$; 9) например, $(7p)^9 \cdot (7p)^{10}$; 11) например, $p^8 \cdot p^{12}$.

2.6. 2) 3^3; 4) x^8; 6) a^4; 8) 17^{2n-1}; 10) $(-0{,}8)^{t-6}$.

2.7. 1) Например, $2^{20} : 2^8$; 3) например, $\left(-\frac{1}{2}\right)^{17} : \left(-\frac{1}{2}\right)^2$; 5) например, $a^{t+3} : a^3$; 7) например, $\left(\frac{2}{7}b\right)^7 : \left(\frac{2}{7}b\right)^4$.

2.8. 2) 5^6; 4) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-10}$; 6) 5^{16}; 8) $(-3)^{4p}$.

2.9. 1) Да.

2.10. 2) $\frac{y^5}{32}$; 4) $-512a^3$; 6) $1000x^6y^{15}$.

2.11. 1) $\frac{x^4}{y^4}$; 3) $\frac{x^4}{y^6}$; 5) $\frac{a^4b^{14}}{25c^8}$.

2.12. 2) $\frac{1}{6^5}$; 4) $\frac{1}{(-8)^{13}}$; 6) $\frac{1}{y^{12}}$; 8) $\frac{1}{(4y)^{16}}$.

2.13. 1) $\frac{1}{8}$; 3) 16; 5) $-\frac{1}{64}$; 7) $\frac{1}{15}$; 9) 1; 11) 1.

2.14. 2) 21^{-12}; 4) $(-a)^{-27}$; 6) 19^{-1}; 8) 2^{-6}.

2.15. 1) $4x^6y^{16}$; 3) $\frac{4}{5}a^3y^2$.

2.16. 2) $-4a^{k-6}b^{8-2k}c^{2k-3}$; 4) $\frac{1}{8}x^6y^{18}$.

2.17. 1) -2048.

2.18. 2) $\frac{67}{131}$.

2.19. 1) Больше; 3) больше; 5) больше; 7) меньше.

2.20. 2) Да; 4) нет; 6) да.

2.21. 1) Не обязательно; 3) не обязательно.

2.22. 2) Не обязательно; 4) да; 6) верно, если $m = n = 1$.

2.23. 1) $0{,}05$.

2.25. 2) Нет.

2.26. 1) Да; 3) нет.

2.27. 2) 7; 4) 1; 6) $0{,}5$; 8) $1{,}1$; 10) $\frac{12}{17}$; 12) $\frac{9}{16}$.

2.28. 1) 1; 3) 7; 5) $\frac{1}{3}$; 7) $0{,}1$.

2.29. 2) 1; 4) $0{,}2$; 6) $0{,}8$; 8) $0{,}6$.

2.30. 1) 3; 4; 5; 7; 9; 10; 3) 3; 4; -5; $0{,}2$; $0{,}06$; -100; 5) 2; 2; 3; $0{,}5$; 10; $0{,}1$.

2.31. 2) -1; 4) -4; 6) -7; 8) -5.

2.32. 1) -3; 3) -30; 5) -6.

2.33. 2) $9\frac{1}{3}$.

2.34. 1) 25; 3) $2{,}25$; 5) $\frac{125}{216}$.

2.35. 2) 625; 4) 6; 6) 12.

2.36. 1) 10; 3) 12; 5) -3; 7) 1024; 9) -25; 11) -1024.

2.37. 2) 10; 4) 4; 6) 0; 8) -2.

2.38. 1) 5; 3) 1; 5) 1; 7) 0.

2.39. 2) -1; 4) 41; 6) -4.

2.40. 1) $0{,}4$; 3) 11.

2.41. 2) 9; 4) -4.

2.42. 1) 1; 3) $-7a^3b^3$.

2.43. 2) $[4{,}5;\ +\infty)$; 4) $[0;\ 2]$; 6) R; 8) $(-\infty;\ -4] \cup [4;\ +\infty)$.

2.44. 1) $(0{,}25;\ +\infty)$; 3) $(1{,}8;\ +\infty)$; 5) $x \neq 1$; 7) $\left(-\infty;\ \frac{11}{17}\right)$.

2.45. 2) 4 мм; 4) 60 см.

2.46. 1) $\pm 0{,}7$; 3) $0{,}2$; 5) -40; 7) $\pm 0{,}5$.

2.47. 2) $-0{,}5$; 4) -2; 6) 0.

2.48. 1) $\pm\sqrt{11}$; 3) $\pm\sqrt[8]{27}$; 5) $\sqrt[7]{38}$; 7) $-\sqrt[15]{6}$; 9) $-\sqrt[13]{13}$.

2.49. 2) $\pm0{,}14$; 4) ±2; 6) $\varnothing$; 8) 0; 10) $\pm\sqrt{3}$.

2.50. 1) $-0{,}2$; 3) $\pm0{,}1$; 5) -2.

2.51. 2) $\sqrt[5]{30}$; 4) $\sqrt[3]{5}$.

2.52. 1) -3; 1; 3) 1.

2.53. 2) ±2; 4) -1; 2; 6) $\pm\sqrt{3}$.

2.54. 1) $[0;\ +\infty)$; 3) R; 5) $[1;\ +\infty)$; 7) $x \neq 0$.

2.55. 2) $-y$; 4) y; 6) $\frac{h}{4}$; 8) h.

2.56. 1) a; 3) $2t$; 5) $-n$.

2.57. 2) a; 4) $-b$.

2.58. 1) $|a|$; 3) $\frac{|a|}{2}$; 5) $|a|$; 7) $|a-b|$.

2.59. 2) $-23, -7, -3\frac{2}{3}, 2, -3\frac{2}{3}, -7, -23$; 4) $-26, -10, -6\frac{2}{3}, -1, 4\frac{2}{3}, 8, 24$.

2.60. 1) -1; 3) 11.

2.61. 2) -80.

2.62. 1) $|a+x|$; 3) $|m-3|$.

2.63. 2) а) $x-2$; б) $2-x$.

2.64. 1) Да.

2.65. 2) $\pm1{,}5$; 4) 4; 6) $\varnothing$; 8) $\varnothing$;

2.66. 1) 6; 3) 0,2; 5) $\sqrt{2}$; 7) $\left(\frac{2}{3}\right)^8$.

2.67. 2) $\sqrt{|a|}$; 4) $\sqrt[3]{n}$; 6) $\sqrt{3xy^2}$; 8) $\frac{3a^3b^2}{2m}$.

2.68. 1) $\sqrt{\sqrt{7}-2}$; 3) $\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$; 5) $\sqrt{\sqrt{5}-2}$.

2.69. 2) 81; 4) 6,25; 6) 0, 4096; 8) $\frac{1}{81}$.

2.70. 1) $\sqrt[6]{6}$; 3) $\sqrt[10]{10}$; 5) $\sqrt[6]{5}$; 7) $\sqrt[14]{7}$; 9) $\sqrt[18]{3}$; 11) $\sqrt[16]{2}$.

2.71. 2) 3; 4) 2.

2.72. 1) Больше; 3) равны; 5) меньше.

2.73. 2) Увеличить в $\sqrt[3]{3}$ раз; 4) увеличить в $\sqrt[3]{9}$ раз.

2.74. 1) -32; 3) 81; 5) -1.

2.75. 2) 0; 4) 1; 6) 1024.

2.76. 1) 10; 3) 3; 5) -18; 7) 60; 9) 12.

2.77. 2) 4; 4) 3.

2.78. 1) $-47{,}5$; 3) 0.

2.79. 2) $-0{,}2$; 4) 2; 6) 4.

2.80. 1) $-1{,}5$; 3) 24.

2.81. 2) $\frac{a}{x}\sqrt[9]{\frac{800a^8}{x^8}}$; 4) $\frac{a^5b}{2}\sqrt[5]{a^4b^4}$; 6) $-6\sqrt[3]{9}\,m^5n^2$; 8) $a^7b^5\sqrt[7]{b^2}$.

2.82. 1) $\sqrt[3]{3a}$; 3) $-2a$; 5) $-1{,}5a$.

2.83. 2) m^2n^2-n; 4) $\sqrt[3]{b}\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{2b}\right)^3$.

2.84. 1) $a\sqrt[3]{a}$; 3) $64\sqrt[3]{4}$; 5) $2x\sqrt[3]{2x}$; 7) $2a^5x^{10}\sqrt[3]{2ax^2}$.

2.85. 2) $\sqrt{2}$.

2.86. 1) $5\sqrt[3]{3}$; 3) $-3\sqrt[3]{2}$; 5) $-2\sqrt[5]{3}$; 7) $-3\sqrt[5]{4}$.

2.87. 2) $2a^2y^2\sqrt[3]{2a^2x^2}$; 4) $2ax\sqrt[3]{2a^2x}$; 6) $-\frac{3xy}{4a^2}\sqrt[5]{y^2}$; 8) $\frac{\sqrt[5]{b-ax^4}}{x^2}$.

2.88. 1) $\sqrt[3]{24ax^4}$; 3) $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$; 5) $\sqrt[3]{-\frac{27n^4}{32m^2}}$; 7) $\sqrt[3]{1-a}$.

2.89. 2) $\frac{\sqrt[5]{16}}{2}$; 4) $-\frac{\sqrt[7]{64}}{2}$; 6) $3\sqrt[3]{6}$; 8) $8\sqrt[5]{3}$.

2.90. 1) $\frac{a\sqrt[3]{b^2}}{b}$; 3) $\sqrt[3]{(t-1)^2\cdot(t+1)}$; 5) $\sqrt[3]{2-x}$.

2.91. 2) $\frac{k(\sqrt[3]{k}+2)}{k^2+8}$; 4) $\frac{m(\sqrt[3]{m^2}-5\sqrt[3]{m}+25)}{m+125}$; 6) $2\left(\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{4}\right)$; 8) $\frac{3-\sqrt[3]{3}}{216}$.

2.92. 1) -16, 25; 3) $\frac{2}{3}$; 5) $\varnothing$; 7) -8; -6.

2.93. 2) -8; 4) -31; 6) $-1{,}75$; 1.

2.94. 1) 18; 3) 45; 5) 10; 7) 6.

2.95. 2) 1080; 4) 99; 6) 1.

2.96. 1) 27; 3) 125; 5) $|a|$; 7) $6|b|$; 9) $a^2|b^3|$; 11) $3x^2|y|^3$.

2.97. 2) $1{,}2a^2|b|^{5m}$; 4) $0{,}8|a|^3b^{4m}$.

2.98. 1) $2\sqrt{2}$; 3) $5\sqrt{7}$; 5) $3\sqrt[4]{3}$; 7) $3\sqrt[6]{2}$; 9) $\frac{5\sqrt{2}}{7}$; 11) $\frac{11}{2}\sqrt{\frac{11}{30}}$.

2.99. 2) $|x|^3\sqrt{a}$; 4) $\frac{4}{x^2\sqrt[4]{x}}$; 6) $0{,}75x^2y^2\sqrt[4]{2x}$; 8) $2c|c|m\sqrt[4]{c^2m}$.

2.100. 1) $\sqrt{20}$; 3) $\sqrt[4]{8}$; 5) $\sqrt[4]{0{,}5a^4}$; 7) $\sqrt[10]{2n^{15}}$.

2.101. 2) $t^2\sqrt[4]{-t^3}$; 4) $m^2|n|^5\sqrt{m}$; 6) $8mn\sqrt{n}$; 8) $-3mn\sqrt[4]{m}$; 10) $mn\sqrt{mn}$; 12) $-mn\sqrt{t}$.

2.102. 1) $-\sqrt{5m^2}$; 3) $\sqrt[4]{m^5-2m^4}$; 5) $-\sqrt[4]{5m^4}$; 7) $\sqrt[4]{(m+4)^3}$.

2.103. 2) 3; 4) 1,3; 6) 1,75; 8) $\frac{9}{11}$.

2.104. 1) $\frac{m}{n}\sqrt[3]{\frac{m^2}{n}}$; 3) $\frac{a}{|b|}\sqrt[4]{\frac{a}{b^2}}$.

2.105. 2) 2; 4) $\sqrt{5}-1$; 6) $4-2\sqrt{3}$.

2.106. 1) $\frac{\sqrt{6}}{3}$; 3) $\frac{\sqrt[4]{512}}{2}$; 5) $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$; 7) $0{,}6\sqrt[4]{2}$; 9) $\frac{\sqrt[4]{9}}{7}$.

2.107. 2) $\sqrt[4]{a-b}$; 4) $(a-b)\sqrt[6]{a+b}$; 6) $\sqrt[4]{a-b}\,(a+b)(a^2+b^2)$.

2.108. 1) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$; 3) $-\frac{3+5\sqrt{3}}{22}$; 5) $1+3\sqrt{15}$; 7) $243\left(\sqrt{7}+\sqrt{6}\right)^4$;

9) $2\left(2+\sqrt[4]{3}\right)\left(4+\sqrt{3}\right)$.

2.109. 2) $\frac{36(\sqrt{3}-\sqrt{2}+2)(2\sqrt{6}+1)}{23}$;

4) $\frac{168+\sqrt{3}(\sqrt{7}-\sqrt{6}-\sqrt{3})(10+2\sqrt{42})}{168}$; 6) $5(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{7}-\sqrt{5})$;

8) $\frac{\sqrt[4]{8}(\sqrt[4]{2}-1)}{2}$.

2.110. 1) $t\leqslant 0$; 3) t — любое; 5) $t\leqslant 0$.

2.111. 2) $k\leqslant\frac{2}{3}$; 4) $k\leqslant -4$.

2.112. 1) −0,25; 3) ∅; 5) 3,75; 7) −2; 0,75.

2.113. 2) −8; 4) $\frac{\sqrt{17}+1}{2}$; 6) 8.

2.114. 1) 15 625; 3) 9,5; 42.

2.115. 2) 0; 4) 5; 6) −3.

2.116. 1) 230; 3) 28.

2.117. 2) 10; 4) 6; 6) $3\frac{1}{3}$; 8) 1.

2.118. 1) $\sqrt{mn^3}$; 3) $\sqrt[12]{\frac{m}{n}}$.

2.119. 2) $\sqrt[6]{a^2bc^3}$; 4) $\sqrt{a^5}$; 6) $\sqrt[12]{a^5}$; 8) $\sqrt[40]{1152a^{13}b^5}$.

2.120. 1) $\sqrt{|a|}+3\sqrt[4]{b}$; 3) $a\sqrt{a}+b\sqrt{b}$; 5) $2\sqrt{a^{15}}$.

2.121. 2) $3+\sqrt[3]{3}$; 4) $\sqrt[3]{19}$; 6) $-\frac{4\sqrt[3]{26}}{3}$.

2.122. 1) 0,1.

2.123. 2) $\sqrt{a}(\sqrt{a}-8)$; 4) $\sqrt[6]{a}\,(\sqrt[6]{a^5}+1)$; 6) $5\sqrt[6]{a}\,(\sqrt[6]{a}+3)$; 8) $3\sqrt[18]{a}\times$
$\times(3\sqrt[18]{a}-4)$.

2.124. 1) $\sqrt{|a|}(\sqrt{|b|}-\sqrt{|c|})$, a, b, c — одного знака; 3) $\sqrt[5]{mn}(\sqrt[5]{m}-\sqrt[5]{n})$;
5) $\sqrt[3]{m}\,(\sqrt[5]{mn}-\sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{km^2})$; 7) $\sqrt[3]{-a}\,(\sqrt[6]{-a}-1)$; 9) $\sqrt[10]{-a}\times$
$\times(1-\sqrt[5]{a^2}+\sqrt[10]{-a})$.

2.125. 2) $\sqrt{6}(1-\sqrt{6})$; 4) $\sqrt[3]{5}\,(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{4})$; 6) $\sqrt[6]{3}\,(\sqrt{2}+1)$; 8) $\sqrt[3]{5}\,(1+\sqrt[3]{3})$.

2.126. 1) $a+4$; 3) $-2\sqrt{mn}$; 5) $4\sqrt[3]{kp}$; 7) $\sqrt{c}+\sqrt[3]{c^2}$; 9) $\sqrt[3]{a^2}-1$.

2.127. 2) $2\sqrt{m}-3\sqrt{n}$; 4) $-\sqrt[4]{m}-\sqrt[4]{n}$; 6) $\frac{(\sqrt[4]{m}-\sqrt[4]{n})(\sqrt{m}+\sqrt{n})}{\sqrt[4]{m}+\sqrt[4]{n}}$; 8) $\frac{1}{\sqrt[6]{m}-\sqrt[6]{n}}$.

2.128. 1) $\frac{\sqrt[3]{a^2}+1}{5}$; 3) $\frac{\sqrt[4]{a}-1}{\sqrt{a}}$.

2.129. 2) 0,25; 4) 0,1.

2.130. 1) 0,1.

2.131. 2) $\frac{n-1}{n}$; 4) 0.

2.132. 1) $\frac{m+n}{m-n}$; 3) $-(\sqrt[4]{m}+1)$.

2.133. 2) $2\sqrt[3]{\frac{1-m}{9m^2}}$.

2.134. 1) $\frac{\sqrt[3]{28+10\sqrt{3}}\cdot(5-\sqrt{3})}{22}$; 3) $\sqrt[3]{(1-\sqrt{a})^2}\cdot(1+\sqrt{a})$; 5) $-\sqrt{\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}}\times$
$\times(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3})\cdot(4+2\sqrt[3]{9}+3\sqrt[3]{3})$.

2.135. 2) ±1; 4) 16; 6) 3; 5; 8) −3,8; 7.

2.136. 1) −5.

2.137. 2) (7; +∞); 4) (−∞; −29); 6) (−29; +∞); 8) [0; 27].

2.138. 1) [1; +∞); 3) (−1; +∞); 5) $\left(-\infty;\ \frac{11}{13}\right]$; 7) [2; 5].

2.139. 2) ∅; 4) R; 6) 0; 8) ∅; 10) $\pm2\sqrt[4]{2}$.

2.140. 1) (−5; 3); 3) (−∞; −1] ∪ [2,2; +∞); 5) (−∞; −13] ∪ [19; +∞).

2.141. 2) (−∞; 1,2) ∪ (1,4; +∞); 4) $\left[\frac{15}{28};\ \frac{4}{7}\right)$; 6) [−5; 4] ∪ [5; 7).

2.142. 1) 1,1; 3) 1,0.

2.143. 1) $\sqrt[6]{4}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$; 3) $\sqrt[5]{3}$, $\sqrt[15]{30}$, $\sqrt[3]{2}$; 5) $\sqrt[16]{64}$, $\sqrt[4]{4\sqrt{1{,}25}}$, $\sqrt[6]{7\sqrt[4]{7}}$.

2.144. 2) 0,9; 4) −1,0.

2.145. 2) Меньше; 4) больше; 6) больше.

2.146. 1) Больше; 3) больше; 5) меньше; 7) меньше; 9) больше.

2.147. 2) Нет; 4) нет; 6) да.

2.148. 1) Да; 3) нет; 5) да.

2.149. 2) а) [4; +∞); б) [0; +∞); 4) а) [−2; +∞); б) [0; +∞);

6) а) [−5; 5]; б) $[0;\ \sqrt[4]{5}]$; 8) а) (−∞; 2]; б) [3; +∞).

2.150. 1) а) (−∞; 0) ∪ (0; +∞); б) (−∞; 0) ∪ (0; +∞);
3) а) (−∞; −2) ∪ (−2; +∞); б) (−∞; 0) ∪ (0; +∞);
5) а) (−∞; 1) ∪ (1; 3) ∪ (3; +∞); б) (−∞; −1] ∪ (0; +∞).

2.151. 1) (−1; 0); (0; 1); 4) (79; 0), $(0;\ \sqrt[4]{2}-3)$; 6) (2; 0), $(0;\ 2-2\sqrt[4]{3})$.

2.152. 1) (0; 0); 3) (−3; 0), $(0;\ \sqrt[5]{4}-1)$; 5) (−3,5; 0), (0; 2).

2.155. 2) а) $[-5; 6]$; б) $[-1; 4]$; в) нет; г) $[-5; 6]$; д) 4 — наибольшее значение, -1 — наименьшее значение; е) $(-2{,}5; 6]$; ж) $[-5; -2{,}5)$;
4) а) $[-4; 5]$; б) $[-2; 1]$; в) $[-4; 5]$; г) нет; д) 1 — наибольшее значение, -2 — наименьшее значение; е) $[-4; -3)$; ж) $(-3; 5]$;
6) а) $[-5; 4]$; б) $[-4; -1]$; в) $[-5; 4]$; г) нет; д) -1 — наибольшее значение, -4 — наименьшее значение; е) нет; ж) $[-5; 4]$.
2.156. 1) 22; 3) -2; 3.
2.157. 2) $[5; +\infty)$; 4) $\left(-\infty; 1\frac{4}{7}\right), \left(1\frac{4}{7}; +\infty\right)$.
2.158. 1) $t \leqslant 0$; 3) $t \geqslant 0$; 5) $t = 0$; 7) t — любое; 9) $t \geqslant 0$.
2.159. 2) $a \geqslant 2$; 4) $a = 0$; 6) $a \leqslant 2$; 8) $a \leqslant -5$.
2.161. 2) Нет; 4) да.
2.162. 1) 8; 3) 3; 5) -3; 7) 0,75.
2.163. 2) -2; 3; 4) 2.
2.164. 1) -3; 5; 3) 11.
2.165. 2) 1; 4) -2.
2.166. 1) -1; 2; 3) -1; 3.
2.167. 2) Да; 4) да.
2.168. 1) 0; 7; 3) 0; 3; 5; 5) 0; 9,5.
2.169. 2) $-4{,}5$; 3; 4) -5; 3.
2.170. 1) -1; 0; 3) 4; 5; 5) 1.
2.171. 2) Если $a < -2$, то решений нет; если $a = -2$, то $x = 9$; если $a > -2$, то $x = 5 - 4a - a^2$; 4) если $a \geqslant 0{,}25$, то $x = \frac{a+1}{5}$; если $a < 0{,}25$, то решений нет; 6) если $a \in [-1; 0] \cup (0; +\infty)$, то $x = a + 1$; иначе решений нет.
2.172. 1) -6; $\frac{1}{3}$; 2) -9; 1,4; 3) -7; 1,5; 4) -8; $1\frac{1}{3}$.
2.173. 1) -1; 4; 2) 2; 7; 3) 1; 4; 4) 5.
2.174. 1) -9; -2; 2) 1; 10; 3) 6; 4) 5.
2.175. 1) 1; 2) 5; 3) 7; 4) 4.
2.176. 1) 2; 2) 1; 3) -1; $-0{,}25$; 4) -1; $\frac{32}{43}$.
2.177. 1) -1; 5; 2) -1; 2,4; 4; 3) -2; 0; 4) -1; 2.
2.178. 1) $[3; +\infty)$; 3) $(-8; 4{,}8]$; 5) $[0{,}5; 5)$.
2.179. 2) $\left[-1\frac{1}{6}; 3\right) \cup (7; +\infty)$; 4) $[1; 2{,}8]$.
2.180. 1) $(-\sqrt{0{,}9}; \sqrt{0{,}9})$; 3) $\left(-\infty; \frac{2}{11}\right)$; 5) $(-\infty; -3]$.
2.181. 2) $(2; +\infty)$; 4) $\left(2\frac{1}{17}; 3\right]$; 6) $\left[\frac{2}{3}; \frac{11}{12}\right)$.
2.182. 1) $[-6; -0{,}5) \cup (1{,}5; 3)$; 3) $\left(2\frac{1}{15}; +\infty\right)$.
2.183. 2) $(1; +\infty)$; 4) $(4; +\infty)$; 6) $[0; 9)$; 8) $\varnothing$.
2.184. 1) $[0; 1]$; 3) $[1; +\infty)$; 5) $[0; 1)$; 7) $(1; +\infty)$.
2.185. 2) 2; 4) $[1; 6]$; 6) 3; 8) $(-\infty; -7] \cup [-4; -1]$.
2.186. 1) $[0; 1)$; 3) $[0; 25)$.

2.187. 1) $(-2; 1) \cup [4; 5]$; 2) $(2; 3]$; 3) $(-\infty; -7) \cup (-4; -2) \cup (2; 3) \cup (3; +\infty)$; 4) $(-5; 4) \cup (4; 5)$.
2.188. 1) $(-1{,}5; -0{,}5) \cup (1; +\infty)$; 2) $(-0{,}8; 1)$; 3) $(-\infty; -0{,}75) \cup (1; 1{,}25]$; 4) $\left(-\frac{2}{3}; 1\right) \cup \left\{1\frac{1}{3}\right\}$.
2.189. 1) $(-\infty; -0{,}5] \cup [0{,}68; +\infty)$; 2) $\left[\frac{46}{61}; \frac{3}{4}\right)$; 3) $(-\infty; -0{,}75] \cup \left(\frac{108}{121}; +\infty\right)$; 4) $\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{7}\right)$.
2.190. 1) $[-1{,}5; 4)$; 2) $(-\infty; 1{,}2] \cup (7; +\infty)$; 3) $(-\infty; -6) \cup [-1{,}25; +\infty)$; 4) $\left(-5; 1\frac{1}{3}\right]$.
2.191. 1) $(-\infty; -2] \cup \left[5; 5\frac{9}{13}\right]$; 2) $(7{,}5; +\infty)$; 3) $(-\infty; -3] \cup \left[4; 4\frac{4}{11}\right]$; 4) $\left[6\frac{9}{16}; +\infty\right)$.
2.192. 1) $[-2; -1{,}6] \cup [0; 2]$; 2) $[-1{,}8; 0]$; 3) $[-4; -3{,}2) \cup (0; 4]$; 4) $\left(-1\frac{15}{17}; 0\right)$.
2.193. 1) $[-5; -1)$; 2) $\left(-2; 6\frac{1}{3}\right)$; 3) $[-3{,}2; -3]$; 4) $[-16; 0{,}2]$.
2.194. 1) $[5; +\infty)$; 2) $[7; 4 + 2\sqrt{3}]$; 3) $[6; 7)$; 4) $\left(\frac{19 + 2\sqrt{7}}{3}; +\infty\right)$.
2.195. 1) $(-1; +\infty)$; 2) $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$; 3) $(-\infty; -4]$; 4) $[-0{,}5; 2]$.
2.196. 1) $[-20; -4] \cup (0; +\infty)$; 2) $[-6; 0)$; 3) $[-30; 0) \cup (6; +\infty)$; 4) $(0; 4)$.
2.197. 1) $[8; +\infty)$; 2) $[5{,}5; +\infty)$; 3) $[6; +\infty)$; 4) $[7; +\infty)$.
2.198. 1) $(3; +\infty)$; 2) $(5; 6)$; 3) $\varnothing$; 4) $(1; 2)$.

Глава 3

3.1. б) 3; 8; k; $n - 1$; $n + 2$; г) нет, нет, да, да, нет, нет, да, да.
3.2. а) 125; 512; 1000; n^3; $(n+2)^3$; в) 512; 1331; $(k+1)^3$; $(n+3)^3$; $(n-1)^3$.
3.3. 2) 3; 7; 11; 15; 4) 8; 10; 12; 14; 6) 0; 2; 6; 12; 8) 9; 27; 81; 243.
3.4. 1) -1; -12; -45; 3) 3; 2; $1\frac{2}{3}$; 5) -1; 1; -1; 7) 2; $1\frac{1}{4}$; $1\frac{1}{9}$.
3.5. 2) -12; -22; 4) 13; 23; 6) $\frac{62}{39}$; $\frac{92}{59}$; 8) 3; -1.
3.6. 1) $a_3 = 14$, $a_5 = 20$, $a_8 = 23$; 3) $a_3 = 36$, $a_5 = 324$, $a_6 = 972$; 5) $a_3 = \frac{1}{2}$, $a_5 = \frac{2}{3}$, $a_6 = \frac{5}{7}$; 7) $a_3 = \frac{9}{7}$, $a_5 = \frac{33}{31}$, $a_8 = \frac{65}{63}$.
3.7. 2) $a_2 = 18$, $a_3 = 108$, $a_4 = 648$, $a_5 = 3888$; 4) $a_2 = 30$, $a_3 = 7{,}5$, $a_4 = 1{,}875$, $a_5 = 0{,}46875$.
3.8. 1) 3; 6; 9; 12; 15; $a_n = 3n$; 3) 9; 18; 27; 36; 45; $a_n = 9n$.
3.9. 2) 3; 8; 13; 18; 23; $a_n = 5n - 2$; 4) 5; 15; 25; 35; 45; $a_n = 10n - 5$.

3.10. 1) $a_4 = 1,5$; $a_6 = 1\frac{1}{3}$; $a_7 = 2$.
3.11. 45 360.
3.12. 997.
3.13. 2) 19,75; 4) −285.
3.14. 1) Да; 3) да; 5) нет; 7) нет.
3.15. 2) −2; 0; 2; 4; 4) 6; 2; −2; −6; 6) 9, $9\frac{1}{3}$, $9\frac{2}{3}$, 10.
3.16. 1) −2; 3) $-1\frac{1}{6}$.
3.17. 2) 17; 2; 4) 4; 4; 6) 3; −0,5; 8) $\sqrt{3}-10$; −2; 10) −6; 0.
3.18. 1) 31; 3) −91; 5) 9,5.
3.19. 2) 6; 4) 2; 6) −4; 8) $-1\frac{2}{3}$.
3.20. 1) 5; 3) −5; 5) 6; 7) 4.
3.21. 2) 5; 15; 25; 35; 45; 4) 6; 4; 2; 0; −2.
3.22. 1) $a_n = 4n+2$; 3) $a_n = -5n+6$; 5) $a_n = 0,25n+4,75$; 7) $a_n = 3a^2n+3a^2$.
3.23. 2) $a_n = -4n+45$; 4) $a_n = -6n-2$.
3.24. 1) 10.
3.25. Нет.
3.26. 1) 9.
3.28. 2) 10; 6; 2; −2; −6; 4) −26; −16; −6; 4; 14.
3.29. 1) $a_1 = 18$, $a_6 = 33$, $d = 3$; 3) $a_1 = -16$; $a_6 = -6$, $d = 2$.
3.30. 2) $a_{29} = 0$, $a_1 = 168$.
3.31. 1) $-3\frac{2}{3}$, $-\frac{1}{3}$; 3) 8; 11; 14; 17; 20; 23.
3.32. 2) $a_1 = 5$, $d = 3$; 4) $a_1 = -31$, $d = 2$ или $a_1 = 15$, $d = 2$.
3.34. 1) 13.
3.35. 2) −6,24.
3.36. 1) 1050; 3) −4100; 5) $10-60\sqrt{2}$.
3.37. 2) 7221; 4) 147 120.
3.38. 1) $x = 1,5$; 3) $x_1 = -1$; $x_2 = 2$.
3.39. 2) $3186b^2$.
3.40. 1) 493; 3) −204; 5) 57.
3.41. 2) $a_1 = 5$, $d = 2$; 4) $a_1 = 157$, $d = -23$.
3.42. 1) $a_n = 140$, $d = 10$.
3.43. 2) 13 113; 4) 38 880.
3.44. 1) 5320; 3) 2205.
3.45. 2) а) 240; б) 520.
3.46. 1) $a_1 = 8$, $d = -3$.
3.47. 2) 55; 4) 58; 6) 4.
3.48. 1) 12 324; 3) 350; 5) −21; 7) 116.
3.49. 2) Да; 4) да; 6) да.
3.50. 1) 156.

3.51. 2) Нет.
3.52. 1) 9.
3.53. 2) 648; 1944; 4) −0,08; 0,016; 6) $\frac{1}{32}$; $-\frac{1}{64}$; 8) 45; $-45\sqrt{3}$; 10) 1; 1.
3.54. 1) Отрицательны.
3.55. 2) $b_n = 3\cdot 4^{n-1}$; 4) $b_n = \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$; 6) $b_n = -\frac{1}{4^{n-2}}$; 8) $b_n = (-1)^{n-1}\cdot 2^n$.
3.56. 1) $b_1 = 10$, $b_2 = 20$, $b_3 = 40$; $b_{n-1} = 2,5\cdot 2^n$, $b_{n+1} = 10\cdot 2^n$;
3) $b_1 = 100$, $b_2 = 500$, $b_3 = 2500$; $b_{n-1} = 4\cdot 5^n$, $b_{n+1} = 100\cdot 5^n$.
3.57. 2) $\frac{1}{1024}$; 4) $-\frac{1}{128}$; 6) −5; 8) 32.
3.58. 1) ±0,5; 3) −3.
3.59. 2) 6; 4) 7.
3.60. 1) $b_1 = \frac{4}{3}$, $q = 3$, $b_n = 4\cdot 3^{n-2}$; 3) $b_1 = -896$, $q = -0,25$, $b_n = \frac{14}{4^{n-3}}$ или $b_1 = 896$, $q = 0,25$, $b_n = -\frac{14}{4^{n-4}}$.
3.61. 2) −50; 4) $\pm\frac{1}{16}$.
3.62. 1) $b_1 = 28$, $b_4 = 1792$; 3) $b_1 = 1$, $b_4 = 8$.
3.63. 2) $\pm\frac{2}{15}$, $\frac{1}{6}$, $\pm\frac{5}{24}$, $\frac{25}{96}$, $\pm\frac{125}{384}$; 4) $\pm\frac{10^7}{243}$, $\frac{10^6}{81}$, $\pm\frac{10^5}{27}$, $\frac{10^4}{9}$, $\pm\frac{10^3}{3}$.
3.64. 1) $b_7 = \pm 3$, $q = \pm\frac{1}{27}$; 3) $b_7 = \pm 81$, $q = \pm\frac{1}{3}$.
3.65. 2) $b_5 = \pm 12$; $b_1 = \pm 37\frac{25}{27}$; 4) $b_5 = \pm 2\sqrt{2}$; $b_1 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.
3.66. 1) ±729; 3) $\pm 1\frac{2}{3}$.
3.67. 2) ±0,05; 4) ±15; 6) ±1; 8) $\pm 6\sqrt{2}$.
3.68. 1) 1; 5.
3.69. 2) Да; 4) нет.
3.72. 1) 21; 3) 1,2496; 5) 5.
3.73. 2) 4372; 4) $364\frac{2}{3}$; 6) 252; 8) $\frac{58975}{24576}$.
3.74. 1) 511; 3) $364\frac{13}{27}$.
3.75. 2) $b_8 = 1215$, $S_{10} = 16\,401\frac{2}{3}$; 4) $b_8 = 171\,875$, $S_{10} = 5\,371\,093{,}2$; 6) $b_8 = 81$, $S_{10} = 1093\frac{13}{27}$ или $S_{10} = 546\frac{20}{27}$; 8) $b_8 = 16$, $S_{10} = 160$ или $S_{10} = 0$.
3.76. 1) 6; 3) 5.
3.77. 2) $b_1 = -1$, $b_8 = 128$; 4) $n = 5$, $b_n = 567$; 6) $b_1 = 18$, $q = -\frac{2}{3}$ или $b_1 = 2$, $q = 2$.

3.78. 1) 1275; 3) $-1\frac{1}{27}$.

3.79. 2) $-\sqrt[3]{7}$ или 2; 4) ± 5.

3.80. 1) $b_n = 4 \cdot 3^n$.

3.82. 2) Да; 4) да; 6) нет; 8) да.

3.83. 1) $1\frac{1}{3}$; 3) $-57\frac{1}{6}$; 5) $\frac{1}{4}$.

3.84. 2) $1{,}5\sqrt{6}$; 4) $\frac{5+3\sqrt{3}}{2}$.

3.85. 1) 1; 3) 13,5; 5) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

3.86. 2) 2; 4) $-0{,}25$.

3.87. 1) $b_n = \frac{24}{5^{n-2}}$; 3) $b_n = 75 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

3.88. 2) Да; 4) нет.

3.89. 1) $\frac{13}{24}$.

3.90. 2) $2\pi R^2$ — сумма площадей всех кругов; $4R^2$ — сумма площадей всех квадратов;

3.91. 1) 8; 3) 4; 5) 6.

3.92. 2) 0,(01); 4) 0,(0001); 6) 0,(000001).

3.94. 1) 0,(7); 3) 0,(4); 5) 0,(5).

3.95. 2) $3\frac{8}{33}$; 4) $31\frac{49}{90}$; 6) $9\frac{247}{1980}$; 8) $\frac{451}{999}$.

3.96. 1) 0, (69); 3) 0,9 (2).

3.97. 2) 1,6; 4) 2,5.

3.99. 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51, 54.

3.100. ± 125.

3.101. $a_n = 3n - 1$, $b_n = 2 \cdot (\pm 2)^{n-1}$.

3.102. $a_n = 12n - 9$, $b_n = 3^n$.

3.103. $a = 4$, $b = 12$, $c = 36$.

3.104. $a = 7$, $b = 28$, $c = 112$.

3.105. 2.

3.106. $b_1 = 32$, $q = 0{,}5$ или $b_1 = 2$, $q = 2$.

3.107. 19; 11; 3 или 4; 11; 18.

3.108. 18; 7; -4 или 3; 7; 11.

3.109. 5; 15; 45.

3.110. 4; 8; 12; 18 или 17,5; 12,5; 7,5; 4,5.

3.111. $\frac{4}{9}$; $-2\frac{2}{9}$; $11\frac{1}{9}$ или 4; 12; 36.

3.112. $a_n = -12n + 30$, $b_n = 18 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ или $a_n = 8n$, $b_n = 8 \cdot 2^{n-1}$.

3.113. 27; 81; 243.

3.114. -2.

3.115. 1) 220 816,16 р.; 2) 530 450 р.

3.116. 1) 419 135 р.; 2) 7 %.

3.117. 1) 296 049; 2) 354 000.

3.118. $a_{50} > b_{50}$.

Глава 4

4.1. $\frac{25!}{6!}$.

4.2. 1) 35; 2) 35; 3) 840.

4.3. 2 ч.

4.4. 1) 6 652 800; 2) 604 800.

4.5. 43 680.

4.6. 1) 33 600; 2) 2 419 200; 3) 72 576 000; 4) 580 608 000.

4.7. 46 376.

4.8. 136.

4.9. 1) 210; 2) 126.

4.10. 17 441 320.

4.11. 378 224.

4.12. 10 080.

4.13. 378.

4.14. 434.

4.15. 1) 40 320; 2) 322 560; 3) 5040; 4) 35 280; 5) 80 640; 6) 362 880; 7) 80 640; 8) 282 240; 9) 120 960; 10) 4320.

4.16. 1) 3024; 2) 60 480; 3) 362 880; 4) 60; 5) 120; 6) 6.

4.17. 1) 120; 2) 360; 3) 20 160; 4) 24.

4.18. 1) 255; 2) 246; 3) 210; 4) 126.

4.19. 217 945 728 000.

4.20. 1) $\frac{3}{13}$; 2) $\frac{3}{13}$; 3) $\frac{6}{13}$; 4) $\frac{7}{13}$; 5) $\frac{2}{13}$; 6) $\frac{6}{13}$.

4.21. 1) $\frac{10}{63}$; 2) $\frac{20}{63}$; 3) $\frac{10}{21}$; 4) $\frac{20}{63}$; 5) $\frac{1}{126}$; 6) $\frac{5}{126}$.

4.22. 1) $\frac{1}{7}$; 2) $\frac{1}{42}$.

4.23. 1) 0,72; 2) 0,01; 3) 0,28; 4) 0,5.

4.24. 1) $\frac{1}{7}$; 2) $\frac{6}{7}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{7}$; 5) $\frac{2}{7}$; 6) $\frac{5}{7}$; 7) $\frac{1}{6}$; 8) $\frac{1}{21}$; 9) $\frac{20}{21}$; 10) $\frac{1}{42}$.

4.25. 1) $\frac{1}{14}$; 2) $\frac{1}{7}$; 3) $\frac{1}{14}$; 4) $\frac{1}{14}$; 5) $\frac{1}{7}$; 6) $\frac{6}{7}$.

4.26. 1) $\frac{1}{70}$; 2) $\frac{2}{35}$; 3) $\frac{1}{140}$; 4) $\frac{1}{140}$; 5) $\frac{8}{35}$; 6) $\frac{1}{70}$.

4.27. 1) $\frac{38}{87}$; 2) $\frac{3}{29}$; 3) $\frac{20}{87}$.

4.28. 1) $\frac{57}{203}$; 2) $\frac{95}{609}$; 3) $\frac{15}{203}$; 4) $\frac{6}{203}$.

4.29. 1) $\frac{1}{924}$; 2) $\frac{2}{3465}$.

Приложение

П. 1. 1) $\frac{5}{12}$; 2) $1\frac{13}{32}$.

П. 2. 1) $1\frac{11}{120}$; 2) 0,5.

П. 3. 1) 0,1; 2) 3.

П. 4. 1) 12; 2) $2\frac{25}{27}$.

П. 5. 1) 0,1; 2) 1,5.

П. 6. 1) $12\frac{7}{9}$; 2) 9.

П. 7. 1) $1\frac{2}{3}$; 2) 2.

П. 8. 1) 5; 2) 1; 3) 9; 4) 4; 5) 2; 6) 7.

П. 9. 1) −1,4; 2) $11\frac{1}{9}$; 3) 256; 4) $\frac{1}{3}$.

П. 10. 1) $\frac{164\sqrt{5}-665\sqrt{3}}{42}$; 2) $\sqrt{2}-\sqrt{7}$.

П. 11. 1) $-10\sqrt[4]{2}$; 2) −1.

П. 12. 1) 1; 2) 15.

П. 13. 1) Больше; 2) больше; 3) больше; 4) меньше; 5) меньше; 6) больше.

П. 14. 1) $5\sqrt{3}$; 2) $2{,}5\sqrt{10}$; 3) $\frac{\sqrt{6}}{3}$; 4) $1{,}6\sqrt[4]{5}$; 5) $2\sqrt[4]{2}$; 6) $\frac{\sqrt{a+b}}{a+b}$; 7) $11+2\sqrt{30}$; 8) $\frac{19+7\sqrt{5}}{29}$; 9) $-\sqrt{a}-9$; 10) $\frac{\sqrt{mn}+n}{n}$.

П. 15. 1) $2+\sqrt{2}$; 2) $3-\sqrt{3}$; 3) $3\sqrt{3}-4$; 4) $6+2\sqrt{6}$; 5) $-(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})$; 6) $\frac{5(\sqrt[3]{49}-\sqrt[3]{35}+\sqrt[3]{25})}{6}$; 7) $\frac{4+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{2}$; 8) $\frac{9-3\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25}}{4}$; 9) $4(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4})$.

П. 16. 1) $\frac{1}{13}$; 2) $\frac{1}{6}$.

П. 17. 1) 5; 2) 4.

П. 18. 1) a^2+3; 2) a^2+3.

П. 19. 1) $\sqrt{7}+1$; 2) $\sqrt{6}-1$; 3) $\sqrt{6}-2$; 4) $5-2\sqrt{3}$; 5) $2+\sqrt{5}$; 6) $4-\sqrt{5}$.

П. 20. 1) $2\sqrt{7}-1$; 2) $-2\sqrt{6}$.

П. 21. 1) $2^{27}a^{-2}b^{-1}$; 2) $-2^{-1}a^{-2}b$.

П. 22. 1) $\frac{b^2}{a^2(a^2+b^2)}$; 2) $\frac{a+b}{b}$.

П. 23. 1) $\frac{2a+5}{2a(2a-5b)}$; 2) $-\frac{2}{a}$; 3) $\frac{2}{4x^2-2x+1}$; 4) $\frac{x^2-2xy+y^2}{x^2+xy+y^2}$.

П. 24. 1) $-y$; 2) $y(x-y)$; 3) $\frac{y}{x}$; 4) $\frac{x}{y^3}$.

П. 25. 1) $\frac{\sqrt[6]{a}-1}{a}$; 2) $\sqrt[3]{\frac{9}{a}}$.

П. 26. 1) 3; 2) −4; 3) 0,5; 4) $\frac{2}{3}$; 5) −3; 6) 4.

П. 27. 1) −0,5; 3,5; 2) $-7\frac{1}{3}$; $-5\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; $2\frac{2}{3}$.

П. 28. 1) Да; 2) нет; 3) нет; 4) да; 5) нет; 6) да; 7) нет; 8) нет; 9) нет; 10) нет; 11) нет; 12) нет.

П. 29. 1) Да; 2) да; 3) нет; 4) нет; 5) нет; 6) да; 7) нет; 8) нет; 9) нет; 10) нет; 11) нет; 12) нет.

П. 30. 1) −1,3; 2) 2,7; 3) −1; 4) 3.

П. 31. 1) $2\sqrt{3}\pm 1$; 2) $-\sqrt{5}\pm 5$.

П. 32. 1) 1; 2; 4; 2) −1; 5.

П. 33. 1) $x_2=10{,}5$; $p=44$; 2) $x_2=-\frac{7}{15}$, $p=15$.

П. 34. 1) −6, $-\frac{5}{11}$; 2) −0,2; 2.

П. 35. 1) 3,2; 2) −0,25; 2.

П. 36. 1) −6,7; 2) −5,5; 1.

П. 37. 1) −3; −2; 2; 3; 2) −4; −3; 3; 4; 3) ±0,5; 44) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; −1; 1; $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

П. 38. 1) 3; 2) −18; 3) $3\frac{1}{6}$; 4) −2,75.

П. 39. 1) $x\neq-7$, $x\neq 9$; 2) $-1\frac{2}{3}$; 3) 0,875; 4) $-2\frac{2}{3}$; 5) ∅; 6) 13.

П. 40. 1) 3,14; 7; 2) $-3\frac{9}{13}$; 11.

П. 41. 1) 2; 2) 3; 5; 3) 0; 4) 0,5.

П. 42. 1) 1; 9; 2) 1; 4; 3) 1; 16; 4) 36; 121; 5) 1; 6) 46 656; 7) 1; 8) 1; 1.

П. 43. 1) 2; 2) 8; 3) 3; 4) 2; 5) 7; 6) −8; 7) 3; 8) 0.

П. 44. 1) −2; 3; 2) −8; −6; 0; 2; 3) ∅; 4) ∅; 5) −1; $\frac{6}{11}$; 1; $1\frac{3}{5}$; 6) −5; 1,5; 2; 4.

П. 45. 1) −3; −2; 2; 3; 2) ±9; 3) ∅; 4) $\pm\frac{2}{3}$.

П. 46. 1) −1; −0,4; −0,2; 0,4; 2) $-1\frac{2}{3}$; 2; 3) −4; −3; −2; 4) −1; 1; 5) ±0,5; 6) 2; 5; 7) $-1\frac{2}{3}$; 3; 8) ∅.

П. 47. 1) $1\leqslant x\leqslant 4$; 2) $(-\infty;-2]\cup[-1;+\infty)$.

П. 48. 1) $(2; 1)$; 2) $(-5; 8)$.

П. 49. 1) $(6; 9)$; 2) $(6; 7)$.

П. 50. 1) $(-5{,}2; 0{,}4)$, $(5{,}2; -0{,}4)$; 2) $\left(-\frac{13}{33}, \frac{2}{33}\right)$, $\left(\frac{13}{33}, -\frac{2}{33}\right)$.

П. 51. 1) $(-2; 1)$, $(2; -1)$; 2) $(-5; 1)$, $(33; 20)$; 3) $(1; 4)$, $(-2; -5)$; 4) $(2; 0)$, $\left(-\frac{1}{3}, -1\frac{2}{3}\right)$.

П. 52. 1) $(-2{,}5; -0{,}5)$, $(0; -3)$, $(0; 2)$, $(2{,}5; -0{,}5)$; 2) $(-3; 2)$, $\left(-\frac{\sqrt{55}}{3}; \frac{\sqrt{55}}{3}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{55}}{3}; -\frac{\sqrt{55}}{3}\right)$, $(2; -3)$.

П. 53. 1) $a < -3$; $a > 1$; 2) $2{,}5 < a < 3$.

П. 54. 1) $\pm\sqrt{1{,}8}$; 2) $-0{,}125$; 0; 1.

П. 55. 1) $a \geqslant 0$; 2) $a \leqslant 0$.

П. 56. 1) $x > 9$; 2) $x > 8$; 3) $x \geqslant -4$; 4) $x \leqslant 8$.

П. 57. 1) $-7 < -3$; 2) $2 \leqslant x \leqslant 2\frac{2}{3}$; 3) $x \leqslant 0{,}2$; $x \geqslant 1$; 4) $x \neq 4$; 5) $\varnothing$; 6) $-6-\sqrt{15} < x < -6+\sqrt{15}$.

П. 58. 1) $-8 < x < 1{,}5$; 2) $-6 < x < 7{,}5$; 3) $x \leqslant 4$; 4) $-2 \leqslant x \leqslant 7$; 5) $[-2; -1) \cup \{0\} \cup [2; 3) \cup (3; +\infty)$; 6) $(-2; -1) \cup [3; +\infty)$.

П. 59. 1) $(-14; 12)$; 2) $\left(-\infty, \frac{1}{4}\right) \cup \left[1\frac{2}{3}; +\infty\right)$; 3) $[0; 6]$; 4) $x > -5$, $x \neq -4$; 5) $(-1; 1)$; 6) $(-8; 0)$.

П. 60. 1) $[-8; 5]$; 2) $[-10; 2] \cup [4; +\infty)$; 3) $[-5; -2) \cup [3; +\infty)$; 4) $[-1; 0) \cup (1; +\infty)$; 5) $[-3; -1] \cup (0; +\infty)$; 6) $(-\infty; 0] \cup (3; +\infty)$; 7) $(1; 5) \cup (5; +\infty)$; 8) $(-5; +\infty)$; 9) $(-1; 2)$.

П. 61. 1) $[-5; -4) \cup (2{,}5; 3{,}5]$; 2) $\left(-\infty; -1\frac{1}{3}\right) \cup \left(-1\frac{1}{3}; \frac{3}{5}\right) \cup \left(\frac{3}{5}; 1\frac{1}{3}\right) \cup \left(1\frac{1}{3}; +\infty\right)$; 3) $\left(-2\sqrt{2}; -\frac{2}{3}\right) \cup (2\sqrt{2}; +\infty)$; 4) $(-50; 1{,}5) \cup (5; +\infty)$.

П. 62. 1) $(-5; -2) \cup (2; 4) \cup (4; +\infty)$; 2) $(-7; 6) \cup (6; 8)$; 3) $(-3{,}6; 1{,}5) \cup [3; +\infty)$; 4) $(-\infty; -9] \cup (-3; 1{,}5) \cup (1{,}5; +\infty)$.

П. 63. 1) $x < -12$, $x > -4$; 2) $-2 < x < 8$; 3) $-2 \leqslant x \leqslant 6$; 4) $x \leqslant -3\frac{1}{3}$, $x \geqslant -2$; 5) R; 6) $\varnothing$.

П. 64. 1) $-0{,}5 < x < 3{,}5$; 2) $x < -2\frac{1}{3}$, $x > 1$; 3) $x \leqslant -1$, $x \geqslant 0{,}6$; 4) $-1 \leqslant x \leqslant 1\frac{2}{9}$.

П. 65. 1) $x > 11$; 2) $-4 \leqslant x < 45$; 3) $x < -5{,}5$; 4) $-3\frac{5}{6} < x \leqslant \frac{1}{3}$; 5) $x \geqslant 3$; 6) $\varnothing$.

П. 66. 1) $[-15; 1]$; 2) $[1; 2{,}8]$; 3) $(-\infty; -4] \cup [2; 4)$; 4) $(0; 2] \cup [8; +\infty)$; 5) $(1{,}6; 2]$; 6) $[1; +\infty)$.

П. 67. 1) $(-2; -1] \cup [1; 4)$; 2) $[-2; -1]$; 3) $(0; 5]$.

П. 68. 1) Если $a \geqslant 2$, то решений нет; если $a < 2$, то $x \in (a; 2)$; 2) если $a \leqslant -3$, то $x \in (-3; 3)$; если $|a| < 3$, то $x \in (a; 3)$; если $a \geqslant 3$, то решений нет; 3) если $a < -5$, то $x \in (-\infty; a)$; если $|a| \leqslant 5$, то $x \in (-\infty; -5]$; если $a > 5$, то $x \in (-\infty; -5] \cup [5; a)$.

П. 69. 1) $\left(0; \frac{1}{3}\right]$; 2) $[-7; 6) \cup (0; 1]$; 3) $[4; 5]$.

П. 70. 1) $[-4; 2) \cup (2; +\infty)$; 2) $(-\infty; -1] \cup (1; 4)$; 3) $[-3; 0] \cup (2; 3]$; 4) $(-\infty; -2) \cup [7; +\infty)$; 5) $[-7; 3]$; 6) $[3; 5)$.

П. 73. 1) $y = -2x + 1$; 2) $y = 5x + 8$.

П. 74. 1) $(1{,}8; 0{,}6)$; 2) $(-1{,}5; -3{,}5)$.

П. 75. 1) $(-3; -4)$, $(3; 4)$; 2) $(-2{,}4; -3{,}2)$, $(2{,}4; 3{,}2)$.

П. 76. 1) 8 и 2; 2) 28 и 19.

П. 77. 1) $y = -3x - 5$; 2) $y = 5x + 10$.

П. 78. 1) Увеличится на 6; 2) уменьшится на 27.

П. 79. 1) $y = 12{,}5x + 42{,}5$; 2) $y = 2x + 5$.

П. 80. 1) 5; 2) 3.

П. 81. 1) 1; 2) 0,5.

П. 82. 1) -11; 2) -13.

П. 83. 1) $a = 2$, $b = -8$, $c = 9$; 2) $a = -3$, $b = 12$, $c = 5$.

П. 84. 1) $(-2; 8)$, $(1; 5)$; 2) $(0; 6)$.

П. 96. 1) $(-1; -1;)$, $(0; 0)$; 2) $(\approx -2{,}58; \approx -0{,}39)$, $(\approx -0{,}15; \approx -6{,}67)$, $(\approx 2{,}57; \approx 0{,}39)$; 3) $(\approx -1{,}58; \approx 2{,}53)$, $(\approx 7{,}58; \approx -0{,}52)$; 4) $\varnothing$; 5) $(\approx -1{,}49; \approx -3{,}34)$, $(\approx 1{,}49; \approx 3{,}34)$; 6) $(\approx -4{,}37; \approx -17{,}12)$, $(\approx 1{,}37; \approx 0{,}12)$.

П. 98. 1) $\frac{3}{5}$; 2) $\frac{7}{4}$.

П. 99. 1) $\frac{5}{16}$; 2) $\frac{9}{8}$.

П. 100. 1) Наименьшее — 10 А, наибольшее — 10 Б; 2) наименьшее — синяя, наибольшее — красная.

П. 101. 1) В пачке 16 книг, тираж 24 000; 2) изготовлено 1320 пирожных; 22 пирожных в наборе.

П. 102. 1) 46; 2) 20 м, 24 м.

П. 103. 1) 6 и 12; 2) 6 °С и 9 °С.

П. 104. 1) $\frac{2}{3}$ ч, $\frac{3}{2}$ ч; 2) 0,25 и 4.

П. 105. 1) 7; 8; 9; 10; 2) 11 кг.

П. 106. 1) 72 и 94; 2) 25.

П. 107. 1) 53; 2) 27.

П. 108. 1) 33,1 %; 2) 27,9 %.

П. 109. 1) $11\frac{1}{9}$ %; 2) $16\frac{2}{3}$ %.

П. 110. 1) 40 %; 2) 70 %.

П. 111. 1) 25 %; 2) 20 %.

П. 112. 1) 20; 2) 110.

П. 113. 1) 40 %; 2) 150 %.

П. 114. 1) 20 %; 2) $27\frac{11}{107}$ %.

П. 115. 1) 65 %; 2) уменьшилась на 1,72 %.

П. 116. 1) 15 мин; 2) Федор через 1,8 ч, Тимофей через 0,8 ч.

П. 117. 1) 12 ч, 36 ч; 2) 14 ч, 35 ч.

П. 118. 1) 21 день (Гена), 28 дней (Паша); 2) 36 ч (Лена), 45 ч (Галя).

П. 119. 1) 15 мин; 2) 10 мин.

П. 120. 1) 38 км/ч, 42 км/ч; 2) 50 км/ч — скорость автомобиля, 45 км/ч — скорость мотоцикла.

П. 121. 1) 16 км/ч, 28 км/ч, 4 км/ч; 2) 25 км/ч, 30 км/ч, 3 км/ч.

П. 122. 1) 56 км/ч, 80 км/ч, 720 км; 2) 5 км/ч, 6 км/ч, 9 км.

П. 123. 1) 72 км/ч, 75 км/ч; 2) 12 км/ч, 15 км/ч.

П. 124. 1) 48 км/ч, 72 км/ч; 2) 1,5 ч.

П. 125. 1) 60 км/ч, 80 км/ч; 2) 60 км/ч, 84 км/ч.

П. 126. 1) 90 км/ч; 2) 12 км/ч.

П. 127. 1) 120 км; 2) 380 км.

П. 128. 1) 50 км; 2) 2 км/ч.

П. 129. 1) 20 км; 2) 100 км.

П. 130. 1) 5 км/ч; 7,5 км/ч; 2) 12 км/ч; 18 км/ч.

П. 131. 1) 24 км/ч; 75 км/ч; 2) 6 км/ч, 18 км/ч.

П. 132. 44.

П. 133. 21.

П. 134. 2430.

П. 135. 640,5.

П. 136. 7,4.

П. 137. Нет.

П. 138. 33.

П. 139. $a \neq 0$, $a \neq 1$.

П. 140. $a_1 = -6$, $d = 4$ или $a_1 = 18$, $d = -4$.

П. 141. 37,5 или 52,5.

П. 142. 6.

П. 143. 7; −28; 112; −448 или $-\frac{35}{3}$, $-\frac{140}{3}$, $-\frac{560}{3}$, $-\frac{2240}{3}$.

П. 144. 128.

П. 145. 0,24.

П. 146. $4\sqrt{2}$.

П. 147. $b_1 = 8$, $q = 2$.

П. 148. 5.

П. 149. ±2.

П. 150. 0,5.

П. 151. 50; 10; 2 или 2; 10; 50.

П. 152. $a_n = 6n - 3$.

П. 153. −1.

П. 154. 2; 4; 6.

П. 155. $2\frac{19}{64}$.

П. 156. 2,5.

П. 157. 1) 9-е; 2) 29-й.

П. 158. 20.

П. 159. 7.

П. 160. 7.

П. 161. $2a$.

П. 162. 1) $\frac{31}{99}$; 2) $\frac{2}{3}$; 3) $\frac{11}{45}$; 4) $5\frac{413}{9990}$.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Кузнецова Елена Павловна
Муравьева Галина Леонидовна
Шнеперман Лев Борисович
Ящин Борис Юрьевич

АЛГЕБРА

Учебное пособие для 10 класса
учреждений, обеспечивающих получение
общего среднего образования,
с русским языком обучения
с 12-летним сроком обучения
(базовый и повышенный уровни)

Зав. редакцией *В. Г. Бехтина*. Редактор *Н. М. Алганова*. Оформление *Е. Э. Агунович*. Художественный редактор *А. А. Волотович*. Технический редактор *О. М. Холодинская*. Корректоры *Д. Р. Лосик, О. С. Козицкая, Т. Н. Ведерникова, З. Н. Гришели, В. С. Бабеня, А. В. Алешко*.

Сдано в набор 27.03.2006. Подписано в печать 25.05.2006. Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура школьная. Офсетная печать. Усл. печ. л. 18+0,25 форз. Усл. кр.-отт. 73,5. Уч.-изд. л. 11,8+0,22 форз. Тираж 5035 экз. Заказ 1004.

Издательское республиканское унитарное предприятие «Народная асвета» Министерства информации Республики Беларусь.
ЛИ № 02330/0131732 от 01.04.2004.
220004, Минск, проспект Победителей, 11.

ОАО «Полиграфкомбинат имени Я. Коласа».
220600, Минск, Красная, 23.

Арифметическая прогрессия

$a_{n+1} = a_n + d$, где d — const

Формула n-го члена $a_n = a_1 + d(n-1)$

Свойства и признаки арифметической прогрессии (a_n)

$a_{n+1} - a_n = d$

$a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ $(n > 1)$

$a_n = \dfrac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$ $(n > k)$

$a_n + a_1 = a_{n-1} + a_2 = \ldots = a_{n-k+1} + a_k = \text{const}$

(a_n) — убывающая при $d < 0$
(a_n) — возрастающая при $d > 0$

Сумма n первых членов арифметической прогрессии (a_n)

$S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$

$S_n = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$

Геометрическая прогрессия

$b_{n+1} = b_n \cdot q$, где $q \neq 0$ — const

Формула n-го члена $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

Свойства и признаки геометрической прогрессии (b_n)

$\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = q$

$b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$ $(n > 1)$

$b_n = \sqrt{b_{n-k} \cdot b_{n+k}}$ $(n > k)$

(b_n) — бесконечно убывающая геометрическая прогрессия при $|q| < 1$

Сумма n первых членов геометрической прогрессии (b_n)

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

$S = \dfrac{b_1}{1 - q}$ — сумма всех членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии ($|q| < 1$)

Элементы комбинаторики

$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ — число перестановок во множестве из n элементов

$A_n^m = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-m+1) = \dfrac{n!}{(n-m)!}$ — число размещений из n элементов по m

$C_n^m = \dfrac{A_n^m}{P_m}$ — число размещений из n элементов по m

Элементы теории вероятностей

$P(A)$ — вероятность случайного события A

Если число всех исходов в опыте n, а событие A выпадает m раз, то $P(A) = \dfrac{m}{n}$

$P(\bar{A}) = 1 - \dfrac{m}{n}$

$P(E) = 1$

$\bar{A}$ — событие, противоположное событию A

E — достоверное событие

Вероятность невозможного события равна нулю

Правило умножения

Пусть выбор одного предмета можно осуществить m способами, и для каждого из этих способов выбор другого предмета можно осуществлять n способами. Тогда выбор двух предметов в указанном порядке можно осуществить $m \cdot n$ способами.

Квадраты чисел от 20 до 99

Десятки \ Единицы	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801